

# **Fisika Matematika II**

**2011/2012**

diterjemahkan dari:

Mathematical Methods for Engineers and Scientists 1, 2, dan 3

K. T. Tang

Penterjemah: Imamal Muttaqien

dibantu oleh: Adam, Ma'rifatush Sholiha, Nina Yunia, Yudi Fadillah dan Saleh

Kurnia

**JURUSAN FISIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN GUNUNG DJATI**

**SEPTEMBER 2011**



# Daftar Isi

<b>1</b>	<b>Nilai Eigen Matriks</b>	<b>1</b>
1.1	Nilai Eigen dan Vektor Eigen	1
1.1.1	Persamaan Sekular	1
1.1.2	Sifat-sifat dari Polinomial Karakteristik	8
1.1.3	Sifat-sifat Nilai Eigen	10
1.2	Beberapa Terminologi	11
1.2.1	Konjugasi Hermitian	11
1.2.2	Ortogonalitas	13
1.2.3	Proses Gram-Schmidt	14
1.3	Matriks Uniter dan Matriks Ortogonal	16
1.3.1	Matriks Uniter	16
1.3.2	Sifat-sifat Matriks Uniter	17
1.3.3	Matriks Ortogonal	17
1.3.4	Elemen Bebas dari Matriks Ortogonal	19
1.3.5	Transformasi Ortogonal dan Matriks Rotasi	20
1.4	Diagonalisasi	22
1.4.1	Transformasi Similaritas	22
1.4.2	Diagonalisasi Matriks Persegi	25
1.4.3	Bentuk Kuadratik	28
1.5	Matriks Hermitian dan Matriks Simetrik	31
1.5.1	Definisi	31
1.5.2	Nilai Eigen Matriks Hermitian	32
1.5.3	Pendiagonalan Matriks Hermitian	33
1.5.4	Diagonalisasi Simultan	41
1.6	Matriks Normal	44
1.7	Fungsi sebuah Matriks	46
1.7.1	Fungsi Polinomial sebuah Matriks	46
1.7.2	Evaluasi Fungsi Matriks dengan Pendiagonalan	47
1.7.3	Teorema Cayley-Hamilton	51

---

<b>2</b>	<b>Transformasi Vektor dan Tensor Cartesian</b>	<b>59</b>
2.1	Sifat-sifat Transformasi Vektor . . . . .	60
2.1.1	Transformasi Vektor Posisi . . . . .	60
2.1.2	Persamaan Vektor . . . . .	62
2.1.3	Sudut Euler . . . . .	63
2.1.4	Sifat-sifat Matriks Rotasi . . . . .	66
2.1.5	Definisi Vektor dan Skalar dalam Sifat Transformasi . . . . .	69
2.2	Tensor Cartesian . . . . .	73
2.2.1	Definisi . . . . .	73
2.2.2	Tensor Delta Kronecker dan Tensor Levi Civita . . . . .	75
2.2.3	Outer Product . . . . .	78
2.2.4	Kontraksi . . . . .	79
2.2.5	Konvensi Penjumlahan . . . . .	81
2.2.6	Medan Vektor . . . . .	83
2.2.7	Aturan Pembagian . . . . .	86
2.2.8	Sifat Simetri Tensor . . . . .	87
2.2.9	Pseudotensor . . . . .	88
2.3	Contoh Fisika . . . . .	92
2.3.1	Tensor Momen Inersia . . . . .	92
2.3.2	Tensor Stress . . . . .	93
2.3.3	Tensor Strain dan Hukum Hooke . . . . .	96
<b>3</b>	<b>Transformasi Laplace</b>	<b>103</b>
3.1	Definisi dan Sifat-sifat Transformasi Laplace . . . . .	103
3.1.1	Transformasi Laplace - Sebuah Operator Linier . . . . .	103
3.1.2	Transformasi Laplace untuk Turunan . . . . .	106
3.1.3	Substitusi: Pergeseran $s$ . . . . .	107
3.1.4	Turunan sebuah Transformasi . . . . .	107
3.1.5	Tabel Transformasi Laplace . . . . .	108
3.2	Solusi Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace . . . . .	108
3.2.1	Menyelesaikan Persamaan Diferensial . . . . .	118
3.3	Transformasi Laplace Fungsi Impulsif dan Fungsi Tangga . . . . .	121
3.3.1	Fungsi Delta Dirac . . . . .	121
3.3.2	Fungsi Tangga Heaviside . . . . .	125
3.4	Persamaan Diferensial dengan Fungsi Gaya Diskontinu . . . . .	127
3.5	Konvolusi . . . . .	132
3.5.1	Integral Duhamel . . . . .	133
3.5.2	Teorema Konvolusi . . . . .	134
3.6	Sifat-sifat Transformasi Laplace . . . . .	137

---

3.6.1	Transformasi Integral . . . . .	137
3.6.2	Integrasi Transformasi . . . . .	138
3.6.3	Penskalaan . . . . .	139
3.6.4	Transformasi Laplace Fungsi Periodik . . . . .	139
3.6.5	Invers Transformasi Laplace Melibatkan Fungsi Periodik . . . . .	141
3.6.6	Transformasi Laplace dan Fungsi Gamma . . . . .	142
3.7	Ringkasan Operasi Transformasi Laplace . . . . .	143
3.8	Aplikasi Tambahan Transformasi Laplace . . . . .	145
3.8.1	Menghitung Integral . . . . .	145
3.8.2	Persamaan Diferensial dengan Koefisien Variabel . . . . .	148
3.8.3	Persamaan Integral dan Integrodiferensial . . . . .	150
3.9	Inversi dengan Integral Kontur . . . . .	152
<b>4</b>	<b>Deret Fourier</b>	<b>159</b>
4.1	Deret Fourier untuk Fungsi Berperiode $2\pi$ . . . . .	159
4.1.1	Ortogonalitas Fungsi Trigonometrik . . . . .	159
4.1.2	Koefisien Fourier . . . . .	161
4.1.3	Ekspansi sebuah Fungsi dalam Deret Fourier . . . . .	162
4.2	Konvergensi Deret Fourier . . . . .	165
4.2.1	Kondisi Dirichlet . . . . .	165
4.2.2	Deret Fourier dan Fungsi Delta . . . . .	166
4.3	Deret Fourier Fungsi Berperiode Sebarang . . . . .	168
4.3.1	Penggantian Interval . . . . .	168
4.3.2	Deret Fourier untuk Fungsi Genap dan Ganjil . . . . .	175
4.4	Deret Fourier Fungsi Nonperiodik pada Selang Terbatas . . . . .	177
4.5	Deret Fourier Kompleks . . . . .	182
4.6	Metode Lompatan . . . . .	185
4.7	Sifat-sifat Deret Fourier . . . . .	190
4.7.1	Teorema Parseval . . . . .	190
4.7.2	Jumlah Pangkat Bolak-balik Bilangan Bulat . . . . .	191
4.7.3	Integrasi Deret Fourier . . . . .	194
4.7.4	Turunan Deret Fourier . . . . .	195
4.8	Deret Fourier dan Persamaan Diferensial . . . . .	196
4.8.1	Persamaan Diferensial dengan Syarat Batas . . . . .	197
4.8.2	Osilator Periodik Teredam . . . . .	200
<b>5</b>	<b>Transformasi Fourier</b>	<b>209</b>
5.1	Integral Fourier sebagai sebuah Batas dari Deret Fourier . . . . .	209
5.1.1	Integral Fourier Cosinus dan Sinus . . . . .	213
5.1.2	Transformasi Fourier Cosinus dan Sinus . . . . .	215

---

5.2	Tabel Transformasi Fourier . . . . .	219
5.3	Transformasi Fourier . . . . .	219
5.4	Transformasi Fourier dan Fungsi Delta . . . . .	225
5.4.1	Ortogonalitas . . . . .	225
5.4.2	Transformasi Fourier Melibatkan Fungsi Delta . . . . .	226
5.4.3	Pasangan Transformasi Fourier Tiga Dimensi . . . . .	228
5.5	Beberapa Pasangan Transformasi Penting . . . . .	231
5.5.1	Fungsi Pulsa Persegi . . . . .	231
5.5.2	Fungsi Gaussian . . . . .	231
5.5.3	Fungsi Meluruh secara Eksponen . . . . .	233
5.6	Sifat-sifat Transformasi Fourier . . . . .	234
5.6.1	Sifat Smetri . . . . .	234
5.6.2	Linieritas, Pergeseran, Penskalaan . . . . .	235
5.6.3	Transformasi Turunan . . . . .	237
5.6.4	Transformasi Integral . . . . .	237
5.6.5	Teorema Parseval . . . . .	238
5.7	Konvolusi . . . . .	239
5.7.1	Operasi Matematik Konvolusi . . . . .	239
5.7.2	Teorema Konvolusi . . . . .	241
5.8	Transformasi Fourier dan Persamaan Diferensial . . . . .	244
5.9	Ketidakpastian Gelombang . . . . .	247

---

# 1

## Nilai Eigen Matriks

Diberikan sebuah matriks  $A$ , untuk menentukan sebuah skalar  $\lambda$  dan matriks kolom tak nol  $\mathbf{x}$  yang secara simultan memenuhi persamaan

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (1.1)$$

disebut sebagai persamaan nilai eigen (eigen dalam bahasa Jerman yang berarti *proper*-Inggris atau sebenarnya). Solusi dari persamaan ini berkaitan erat dengan pertanyaan apakah matriks tersebut dapat ditransformasikan dalam bentuk diagonal.

Persamaan nilai eigen banyak sekali dijumpai dalam aplikasi di bidang teknik seperti vibrasi mekanik, arus bolak-balik, dan dinamika benda tegar. Hal ini juga sangat penting dalam fisika modern. Semua struktur dalam mekanika kuantum berdasarkan pada diagonalisasi dari beberapa jenis matriks.

### 1.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

#### 1.1.1 Persamaan Sekular

Dalam persamaan nilai eigen, nilai  $\lambda$  disebut sebagai nilai eigen (nilai karakteristik) dan matriks kolom  $\mathbf{x}$  yang berkaitan dengan ini disebut sebagai vektor eigen (vektor karakteristik). Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$  (1.1) diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Karena

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda I\mathbf{x},$$

dengan  $I$  adalah matriks satuan, kita dapat menuliskan (1.1) sebagai

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \quad (1.2)$$

Persamaan ini memiliki solusi nontrivial jika dan hanya jika determinan dari matriks koefisien hilang (bernilai nol):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.3)$$

Ekspansi dari determinan ini menghasilkan polinomial  $\lambda$  berderajat  $n$ , yang disebut sebagai polinomial karakteristik  $P(\lambda)$ . Persamaan

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \quad (1.4)$$

disebut sebagai persamaan karakteristik (persamaan sekular). Akar-akarnya sejumlah  $n$  adalah nilai eigen dan akan dinyatakan dengan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Nilainya dapat berupa bilangan riil dan juga kompleks. Ketika salah satu nilai eigen dimasukkan ulang pada (1.2), vektor eigen  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dapat dicari. Perhatikan bahwa vektor eigen dapat dikalikan dengan konstanta dan akan tetap menjadi solusi dari persamaan.

Kita akan menuliskan  $\mathbf{x}_i$  sebagai vektor eigen untuk nilai eigen  $\lambda_i$ . Yaitu, jika

$$P(\lambda_i) = 0,$$

maka

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i.$$

Jika semua nilai eigen yang berjumlah  $n$  berbeda, maka kita akan memiliki  $n$  vektor eigen yang berbeda. Jika dua atau lebih nilai eigen sama, kita menyebutnya berdegenerasi. Dalam persoalan yang sama, sebuah nilai eigen yang berdegenerasi bisa memiliki satu buah vektor eigen. Di lain pihak, sebuah nilai eigen yang berdegenerasi juga bisa memiliki vektor eigen yang berbeda.

**Contoh 1.1.1.** Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari  $A$ , jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solusi 1.1.1.** Polinomial karakteristik dari  $A$  adalah

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3,$$



dan persamaan sekularnya

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Sehingga nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Jika kita pilih vektor eigen  $\mathbf{x}_1$  berkaitan dengan nilai eigen  $\lambda_1 = -1$  adalah  $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ , maka  $\mathbf{x}_1$  haruslah memenuhi:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Sehingga bisa direduksi menjadi

$$2x_{11} + 2x_{12} = 0.$$

Sehingga vektor eigennya  $x_{11} = -x_{12}$ , yaitu  $x_{11} : x_{12} = -1 : 1$ . Sehingga vektor eigennya dapat dituliskan

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sebuah konstanta, baik positif atau negatif, yang dikalikan dengan vektor eigen ini akan tetap merupakan solusi, namun kita tidak akan menganggapnya sebagai vektor eigen yang berbeda. Dengan prosedur yang serupa, kita bisa menghitung vektor eigen untuk  $\lambda_2 = 3$  yaitu

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Contoh 1.1.2.** Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari  $A$ , jika

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Solusi 1.1.2.** Polinomial karakteristik dari  $A$  adalah

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

dan persamaan sekularnya

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Nilai eigennya adalah

$$\lambda = 1 \pm i.$$

Jika  $\lambda_1 = 1 + i$  dan vektor eigennya  $\mathbf{x}_1$  adalah  $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$ , maka  $\mathbf{x}_1$  harus memenuhi

$$\begin{pmatrix} 3 - (1 + i) & -5 \\ 1 & -1 - (1 + i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

yang memberikan

$$\begin{aligned}(2 - i)x_{11} - 5x_{12} &= 0, \\ x_{11} - (2 + i)x_{12} &= 0.\end{aligned}$$

Persamaan pertama memberikan

$$x_{11} = \frac{5}{2 - i}x_{12} = \frac{5(2 + i)}{4 + 1}x_{12} = \frac{2 + i}{1}x_{12},$$

yang juga merupakan hasil yang sama dari persamaan kedua, seperti sudah seharusnya. Sehingga  $\mathbf{x}_1$  dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang sama, untuk  $\lambda = \lambda_2 = 1 - i$  vektor eigen  $\mathbf{x}_2$  diberikan oleh

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 - i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga kita telah memiliki sebuah contoh untuk matriks riil dengan nilai eigen dan vektor eigen kompleks.

**Contoh 1.1.3.** Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari  $A$ , jika

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solusi 1.1.3.** Polinomial karakteristik dari  $A$  adalah

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1 - \lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45,$$

dan persamaan sekularnya

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = (\lambda - 5)(\lambda + 3)^2 = 0.$$

Persamaan ini memiliki sebuah akar 5 dan dua akar yang sama -3

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -3.$$

Vektor eigen yang dimiliki oleh nilai eigen  $\lambda_1$  haruslah memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} -2 - 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 - 5 & -6 \\ -1 & -2 & 0 - 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan metode eliminasi Gauss, persamaan ini dapat dituliskan

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0,$$

yang berarti

$$\begin{aligned} -7x_{11} + 2x_{12} - 3x_{13} &= 0, \\ x_{12} + 2x_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Dengan memilih  $x_{13} = 1$  maka  $x_{12} = -2$  dan  $x_{11} = -1$ . Sehingga untuk nilai eigen  $\lambda_1 = 5$ , vektor eigennya  $\mathbf{x}_1$  adalah

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Karena nilai eigen  $-3$  berdegenerasi sebanyak 2, maka vektor eigen yang kita punyai bisa atau dua buah. Marilah kita nyatakan vektor eigennya sebagai  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ . Vektor eigen ini haruslah

memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} -2+3 & 2 & -3 \\ 2 & 1+3 & -6 \\ -1 & -2 & 0+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan metode eliminasi Gauss, persamaan ini dapat dituliskan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

yang berarti

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0.$$

Kita dapat menyatakan  $x_1$  dalam  $x_2$  dan  $x_3$  dan tidak terdapat batasan untuk  $x_2$  dan  $x_3$ . Ambil  $x_2 = c_2$  dan  $x_3 = c_3$  sehingga  $x_1 = -2c_2 + 3c_3$ , sehingga kita dapat menuliskan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Karena  $c_2$  dan  $c_3$  sebarang, pertama kita bisa memilih  $c_3 = 0$  dan mendapatkan satu vektor eigen, kemudian yang kedua, kita memilih  $c_2 = 0$  untuk memperoleh vektor eigen yang lain. Sehingga berkaitan dengan nilai eigen  $\lambda = -3$  yang berdegenerasi ini, terdapat dua buah

vektor eigen

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dalam contoh ini, kita hanya memiliki dua buah nilai eigen berbeda, tetapi kita tetap memiliki tiga buah vektor eigen yang berbeda.

**Contoh 1.1.4.** Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari  $A$ , jika

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Solusi 1.1.4.** Polinomial karakteristik dari  $A$  adalah

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3 - \lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4,$$

dan persamaan sekularnya

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Tiga buah nilai eigennya

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Dari persamaan untuk vektor eigen  $\mathbf{x}_1$  yang dimiliki oleh nilai eigen  $\lambda_1$

$$\begin{pmatrix} 4 - 1 & 6 & 6 \\ 1 & 3 - 1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0,$$

kita memperoleh solusi

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Vektor eigen  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  yang dimiliki oleh dua buah nilai eigen berdegenerasi, memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} 4 - 2 & 6 & 6 \\ 1 & 3 - 2 & 2 \\ -1 & -5 & -2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, kita dapat menunjukkan bahwa persamaan ini ekuivalen dengan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

yang berarti

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Jika kita memilih  $x_3 = -2$ , maka  $x_2 = 1$  dan  $x_1 = 3$ , sehingga

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dua buah persamaan di atas tidak mengijinkan adanya vektor eigen yang merupakan perkalian dengan sebuah konstanta dikalikan  $\mathbf{x}_2$ . Sehingga untuk matriks  $3 \times 3$  ini, hanya terdapat dua buah vektor eigen yang berbeda.

---

---

### 1.1.2 Sifat-sifat dari Polinomial Karakteristik

Polinomial karakteristik memiliki banyak sifat yang berguna. Untuk mengelaborasinya, pertama kita perhatikan kasus  $n = 3$ .

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & -\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & -\lambda & 0 \\ a_{31} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & -\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= |A| + \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) (-\lambda) \\
&\quad + (a_{11} + a_{22} + a_{33})(-\lambda)^2 + (-\lambda)^3. \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Sekarang jika  $\lambda_1, \lambda_2$  dan  $\lambda_3$  adalah nilai eigen, maka  $P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = P(\lambda_3) = 0$ . Karena  $P(\lambda)$  adalah polinomial orde 3, maka

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = 0.$$

Dengan mengekspansikan polinomial karakteristik

$$P(\lambda) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1)(-\lambda) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(-\lambda)^2 + (-\lambda)^3.$$

Bandingkan dengan (1.5)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{Tr } A.$$

Hal ini berarti jumlah nilai eigen sama dengan *trace* dari  $A$ . Hubungan ini sangat berguna untuk mengecek apakah nilai eigen yang kita hitung benar. Selanjutnya

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

yang merupakan jumlah dari minor utama (*principal minor*) atau minor dari elemen diagonal, dan

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |A|.$$

Hal ini berarti perkalian semua nilai eigen tidak lain adalah determinan dari  $A$  yang juga merupakan hubungan yang sangat berguna. Jika  $A$  adalah matriks singular  $|A| = 0$ , maka paling tidak salah satu nilai eigen adalah nol. Dari sini berarti jika matriks tersebut memiliki invers, maka tidak ada nilai eigen yang nol.

Perhitungan yang sama bisa digunakan untuk menggeneralisasi hubungan-hubungan ini untuk matriks dengan orde yang lebih tinggi.

**Contoh 1.1.5.** Carilah nilai eigen dan matriks eigen dari matriks  $A$  jika

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

**Solusi 1.1.5.**

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4 - \lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} - \left( \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) \lambda + (5 + 4 - 3)\lambda^2 - \lambda^3 \\ &= 6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Sehingga tiga buah nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Sebagai pengecekan, jumlah nilai eigen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 3 = 6,$$

yang sama dengan trace  $A$

$$\text{Tr } A = 5 + 4 - 3 = 6.$$

Selanjutnya hasil kali nilai eigen

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 6,$$

yang juga determinan dari  $A$

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

Misalkan  $\mathbf{x}_1$  adalah  $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}$  vektor eigen berkaitan dengan nilai eigen  $\lambda_1$  maka

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda_1 & 7 & -5 \\ 0 & 4 - \lambda_1 & -1 \\ 2 & 8 & -3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, dengan mudah dapat ditunjukkan

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4.5 & -1.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga kita memiliki

$$\begin{aligned} 4x_{11} + 7x_{12} - 5x_{13} &= 0, \\ 3x_{12} - x_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Hanya satu dari tiga buah bilangan yang tak diketahui dapat kita pilih sebarang. Sebagai contoh, pilih  $x_{13} = 3$  maka  $x_{12} = 1$  dan  $x_{11} = 2$ . Sehingga untuk nilai eigen  $\lambda_1 = 1$ , vektor eigennya

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang sama, untuk  $\lambda_2 = 2$  dan  $\lambda_3 = 3$ , vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 1.1.3 Sifat-sifat Nilai Eigen

Terdapat beberapa sifat nilai eigen yang sangat berguna dalam aplikasi matriks. Sifat-sifat ini berdiri sendiri tetapi bisa digunakan secara bersamaan

- Matriks transpos  $\tilde{A}$  atau  $(A^T)$  memiliki nilai eigen yang sama dengan  $A$ . Nilai eigen  $A$  dan  $A^T$  adalah solusi dari  $|A - \lambda I| = 0$  dan  $|A^T - \lambda I| = 0$ . Karena  $A^T - \lambda I = (A - \lambda I)^T$  dan determinan sebuah matriks sama dengan determinan transposnya

$$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^T| = |A^T - \lambda I|,$$

persamaan sekular untuk  $A$  dan  $(A)^T$  identik. Maka  $A$  dan  $(A)^T$  memiliki nilai eigen yang sama.



- Jika  $A$  adalah matriks segitiga baik yang atas maupun bawah, maka nilai eigennya adalah elemen diagonal. Jika  $|A - \lambda I| = 0$  adalah

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0,$$

jelas bahwa  $\lambda = a_{11}, \lambda = a_{22}, \dots, \lambda = a_{nn}$ .

- Jika  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$ , maka nilai eigen dari matriks invers  $A^{-1}$  adalah  $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, 1/\lambda_3, \dots, 1/\lambda_n$ . Kalikan persamaan  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  dari kiri dengan  $A^{-1}$

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x},$$

dan menggunakan  $A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ , kita memiliki  $\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$ . Maka

$$A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}.$$

- Jika  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$ , maka nilai eigen dari matriks  $A^m$  adalah  $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \dots, \lambda_n^m$ . Karena  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , maka

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A\lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}.$$

Dengan cara yang sama

$$A^3\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}, \dots, A^m\mathbf{x} = \lambda^m\mathbf{x}.$$

## 1.2 Beberapa Terminologi

Telah kita lihat untuk matriks persegi  $n \times n$ , nilai eigennya dapat berupa bilangan riil maupun imajiner. Jika nilai eigennya berdegenerasi, kita bisa memiliki atau tidak sejumlah  $n$  vektor eigen yang berbeda.

Bagaimanapun, terdapat jenis matriks yang disebut sebagai matriks hermitian, nilai eigennya selalu riil. Sebuah matriks hermitian  $n \times n$  akan selalu memiliki  $n$  buah vektor eigen yang berbeda.

Untuk memfasilitasi pembahasan kita tentang matriks ini dan juga sifat-sifatnya. Pertama marilah kita perkenalkan beberapa terminologi berikut.

### 1.2.1 Konjugasi Hermitian

#### Konjugasi Kompleks

Jika  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  merupakan sebuah matriks sebarang, yang elemennya dapat berupa bilangan kompleks, konjugasi kompleks matriks tersebut dinotasikan dengan  $A^*$  juga berupa

sebuah matriks dengan orde  $m \times n$  dengan tiap elemennya adalah kompleks konjugat dari elemen pada matriks  $A$  dalam artian

$$(A^*)_{ij} = a_{ij}^*.$$

Jelaslah bahwa

$$(cA)^* = c^* A^*.$$

### Konjugasi Hermitian

Ketika dua buah operasi dari konjugasi kompleks dan transpos dikerjakan berurutan satu dengan yang lainnya pada sebuah matriks, hasil matriksnya disebut sebagai konjugasi hermitian dari matriks asalnya dan dinotasikan sebagai  $A^\dagger$ , dinamakan  $A$  dagger. Orang matematik menyebut  $A^\dagger$  sebagai matriks adjoin. Urutan operasi tidak penting. Yaitu

$$A^\dagger = (A^*)^T = (\tilde{A})^*. \quad (1.6)$$

Sebagai contoh, jika

$$A = \begin{pmatrix} (6+i) & (1-6i) & 1 \\ (3+i) & 4 & 3i \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

maka

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} (6-i) & (1+6i) & 1 \\ (3-i) & 4 & -3i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (6-i) & (3-i) \\ (1+6i) & 4 \\ 1 & -3i \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$A^\dagger = (\tilde{A})^* = \begin{pmatrix} (6+i) & (3+i) \\ (1-6i) & 4 \\ 1 & 3i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (6-i) & (3-i) \\ (1+6i) & 4 \\ 1 & -3i \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

### Konjugasi Hermitian dari Perkalian Matriks

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya bahwa transpos dari hasil kali dua matriks adalah sama dengan perkalian dua buah transpos matriks dengan urutan yang dibalik. Dari sini kita bisa memperoleh

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger,$$

karena

$$(AB)^\dagger = (A^* B^*)^T = \tilde{B}^* \tilde{A}^* = B^\dagger A^\dagger. \quad (1.10)$$

### 1.2.2 Ortogonalitas

#### *Inner Product*

Jika  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$  merupakan vektor kolom dengan orde yang sama  $n$ , *inner product* atau perkalian skalar didefinisikan  $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}$ . Konjugasi hermitian sebuah vektor kolom adalah vektor baris

$$\mathbf{a}^\dagger = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^\dagger = (a_1^* \ a_2^* \ \cdots \ a_n^*),$$

sehingga hasil *inner product* adalah sebuah bilangan

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = (a_1^* \ a_2^* \ \cdots \ a_n^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k^* b_k.$$

Terdapat dua buah lagi notasi yang biasa digunakan untuk *inner product*. Notasi yang paling sering digunakan dalam mekanika kuantum adalah notasi bracket yang diperkenalkan Dirac. Vektor baris dinyatakan sebagai bra, sedangkan vektor kolom dinyatakan sebagai ket. Kita dapat menuliskan vektor kolom sebagai

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}\rangle,$$

sebagai vektor ket dan vektor baris

$$\mathbf{a}^\dagger = \langle \mathbf{a}|$$

sebagai vektor bra. *Inner product* dari dua vektor ini biasanya dinyatakan sebagai

$$\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}.$$

Perhatikan untuk sebarang skalar,  $c$ ,

$$\langle \mathbf{a}|c\mathbf{b}\rangle = c\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle,$$

sedangkan

$$\langle c\mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = c^* \langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle.$$

Notasi lain yang digunakan adalah tanda kurung:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle.$$

Jika  $A$  adalah sebuah matriks

$$(\mathbf{a}, A\mathbf{b}) = (A^\dagger \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

merupakan sebuah identitas, karena

$$(A^\dagger \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (A^\dagger \mathbf{a})^\dagger \mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger (A^\dagger)^\dagger \mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger A \mathbf{b} = (\mathbf{a}, A \mathbf{b}).$$

Sehingga jika

$$(\mathbf{a}, A \mathbf{b}) = (A \mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

maka  $A$  hermitian. Orang matematika menyebut hubungan  $A^\dagger = A$  sebagai *self-adjoint*.

### Ortogonalitas

Dua buah vektor  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$  dikatakan ortogonal jika dan hanya jika

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = 0.$$

Perhatikan bahwa dalam ruang 3 dimensi riil

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n a_k^* b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

hanyalah perkalian dot (titik) dari  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$ . Dalam analisis vektor, jika perkalian dot dari dua buah vektor sama dengan nol, maka dua vektor tersebut tegak lurus.

### Panjang sebuah Vektor Kompleks

Jika kita mengadopsi definisi ini untuk perkalian skalar dua buah vektor kompleks, maka kita mempunyai definisi alami panjang sebuah vektor kompleks dalam ruang berdimensi- $n$ . Panjang sebuah vektor kompleks  $\|\mathbf{x}\|$  dari sebuah vektor  $\mathbf{x}$  adalah

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{x} = \sum_{k=1}^n a_k^* a_k = \sum_{k=1}^n |a_k|^2.$$

#### 1.2.3 Proses Gram-Schmidt

##### Bebas Linier

Himpunan vektor  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  dikatakan bebas linier jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i = 0,$$

yang mengimplikasikan  $a_i = 0$ . Jika tidak maka himpunan tersebut saling bergantung linier.

Pertama marilah kita uji tiga buah vektor

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

untuk bebas linier. Pertanyaannya apakah kita dapat mencari himpunan  $a_i$  yang tidak nol semua sehingga

$$\sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{x}_i = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jelas ini mensyaratkan  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  dan  $a_3 = 0$ . Sehingga tiga buah vektor ini bebas linier.

Perhatikan bahwa bebas atau bergantung linier adalah sifat dari semua anggota, bukan hanya masing-masing vektor.

Jelas jika  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  merepresentasikan vektor tiga dimensi yang noncoplanar (tak sebidang), maka vektor tersebut bebas linier.

### Proses Gram-Schmidt

Diberikan sejumlah  $n$  vektor bebas linier, kita dapat membangun dari kombinasi liniernya sebuah himpunan dari  $n$  buah vektor satuan yang saling ortogonal.

Misalkan vektor yang bebas linier  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ . Definisikan

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|},$$

sebagai vektor satuan pertama. Sekarang definisikan

$$\mathbf{u}'_2 = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1.$$

Perkalian skalar  $\mathbf{u}'_2$  dan  $\mathbf{u}_1$  sama dengan nol

$$(\mathbf{u}'_2, \mathbf{u}_1) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1) - (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0,$$

karena  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 1$ . Hal ini menunjukkan  $\mathbf{u}'_2$  ortogonal terhadap  $\mathbf{u}_1$ .

Kita dapat menormalisasi  $\mathbf{u}'_2$ :

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}'_2}{\|\mathbf{u}'_2\|},$$

untuk mendapatkan vektor satuan kedua  $\mathbf{u}_2$  yang ortogonal terhadap  $\mathbf{u}_1$ .

Kita dapat melanjutkan proses ini secara berulang dengan mendefinisikan

$$\mathbf{u}'_k = \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i,$$

dan

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{u}'_k}{\|\mathbf{u}'_k\|}.$$

Ketika semua  $\mathbf{x}_k$  telah digunakan, kita memiliki sejumlah  $n$  vektor satuan  $u_1, u_2, \dots, u_k$  yang saling ortogonal. Himpunan ini dinamakan himpunan ortonormal. Prosedur ini disebut sebagai proses Gram-Schmidt.

### 1.3 Matriks Uniter dan Matriks Ortogonal

#### 1.3.1 Matriks Uniter

Jika sebuah matriks persegi  $U$  memenuhi kondisi

$$U^\dagger U = I,$$

maka matriks  $U$  dikatakan matriks uniter (satuan). Sejumlah  $n$  kolom dalam matriks uniter dapat dianggap sebagai vektor kolom sejumlah  $n$  dalam sebuah himpunan ortonormal.

Dengan kata lain, jika

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix},$$

dan

$$\mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{u}_j = (u_{i1}^*, u_{i2}^*, \dots, u_{in}^*) \begin{pmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ \vdots \\ u_{jn} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases},$$

maka

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

adalah uniter. Hal ini karena

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & \cdots & u_{1n}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & \cdots & u_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}^* & u_{n2}^* & \cdots & u_{nn}^* \end{pmatrix},$$

sehingga

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & \cdots & u_{1n}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & \cdots & u_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1}^* & u_{n2}^* & \cdots & u_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan mengalikan  $U^{-1}$  dari kanan, kita memiliki

$$U^\dagger U U^{-1} = I U^{-1}.$$

Dari sini kita memperoleh bahwa hermitian konjugat dari sebuah matriks uniter adalah inversnya

$$U^\dagger = U^{-1}.$$

### 1.3.2 Sifat-sifat Matriks Uniter

- Transformasi uniter tidak merubah panjang vektor (invarian).

Misalkan

$$\mathbf{a} = U\mathbf{b}, \quad \text{jadi} \quad \mathbf{a}^\dagger = \mathbf{b}^\dagger U^\dagger,$$

dan

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{b}^\dagger U^\dagger U \mathbf{b}.$$

Karena

$$U^\dagger U = U^{-1} U = I,$$

maka

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} = \|\mathbf{b}\|^2.$$

Sehingga panjang vektor mula-mula sama dengan panjang vektor setelah ditransformasikan.

- Nilai eigen mutlak sebuah matriks uniter sama dengan satu.

Misalkan  $\mathbf{x}$  adalah vektor eigen non-trivial dari sebuah matriks uniter  $U$  untuk sebuah nilai eigen  $\lambda$ .

$$U\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Lakukan konjugasi hermitian dua sisi

$$\mathbf{x}^\dagger U^\dagger = \lambda^* \mathbf{x}^\dagger.$$

Kalikan dua buah persamaan terakhir

$$\mathbf{x}^\dagger U^\dagger U \mathbf{x} = \lambda^* \mathbf{x}^\dagger \lambda \mathbf{x}.$$

Karena  $U^\dagger U = I$  dan  $\lambda^* \lambda = |\lambda|^2$ , maka

$$\mathbf{x}^\dagger \mathbf{x} = |\lambda|^2 \mathbf{x}^\dagger \mathbf{x}.$$

Sehingga

$$|\lambda|^2 = 1.$$

Dengan kata lain, nilai eigen sebuah matriks uniter haruslah berada pada lingkaran satuan sebuah bidang kompleks berpusat di titik asal.

### 1.3.3 Matriks Ortogonal

Jika semua elemen matriks uniter riil, matriks tersebut dikenal sebagai matriks ortogonal. Sehingga sifat-sifat matriks uniter juga merupakan sifat dari matriks ortogonal. Sebagai tambahan

- Determinan sebuah matriks ortogonal sama dengan satu dan minus satu.

Jika  $A$  adalah matriks persegi riil, maka dengan definisi

$$A^\dagger = \tilde{A}^* = \tilde{A}.$$

Sebagai tambahan jika  $A$  matriks uniter  $A^\dagger = A^{-1}$  maka

$$\tilde{A} = A^{-1}.$$

Sehingga

$$A\tilde{A} = I. \tag{1.11}$$

Karena determinan  $A$  sama dengan determinan  $\tilde{A}$ , sehingga

$$|A\tilde{A}| = |A||\tilde{A}| = |A|^2.$$

Tetapi

$$|A\tilde{A}| = |I| = 1,$$

sehingga

$$|A|^2 = 1.$$

Maka determinan dari matriks ortogonal adalah  $+1$  dan  $-1$ .

Sering sekali (1.11) digunakan untuk mendefinisikan sebuah matriks ortogonal. Yaitu sebuah matriks persegi riil  $A$  yang memenuhi (1.11) disebut sebagai matriks ortogonal. Hal ini sama dengan sebuah pernyataan “invers sebuah matriks ortogonal sama dengan transposnya.”

Jika kita tuliskan dalam elemennya, (1.11) diberikan oleh

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{a}_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}, \tag{1.12}$$

untuk semua  $i$  dan  $j$ . Dengan cara yang sama  $\tilde{A}A = I$  dituliskan

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}a_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}. \tag{1.13}$$

Bagaimanapun (1.13) tidak bebas terhadap (1.12), karena  $A\tilde{A} = \tilde{A}A$ . Jika salah satu kondisi terpenuhi (valid), maka kondisi yang lainnya juga harus terpenuhi.

Dengan kata-kata, kondisi ini berarti jumlah dari perkalian elemen dua buah kolom (baris) yang berbeda dari sebuah matriks ortogonal adalah nol, sedangkan jumlah dari kuadrat dari elemen kolom (baris) sama dengan satuan. Jika kita menganggap sejumlah  $n$  kolom dari matriks sebagai  $n$  vektor riil, hal ini berarti  $n$  vektor kolom ini ortogonal dan ternormalisasi. Dengan cara yang sama, semua baris dari sebuah matriks ortogonal adalah ortonormal.



### 1.3.4 Elemen Bebas dari Matriks Ortogonal

Sebuah matriks persegi berorde  $n$  memiliki elemen sejumlah  $n^2$ . Untuk sebuah matriks ortogonal, tidak semua elemennya bebas satu dengan yang lain, karena terdapat beberapa kondisi yang harus terpenuhi. Pertama, terdapat kondisi sejumlah  $n$  agar tiap kolom ternormalisasi. Kemudian terdapat sejumlah  $n(n-1)/2$  agar tiap kolom ortogonal dengan kolom yang lain. Sehingga jumlah parameter bebas sebuah matriks ortogonal adalah

$$n^2 - [n + n(n-1)/2] = n(n-1)/2.$$

Dengan kata lain, sebuah matriks ortogonal berorde  $n$  dikarakterisasi oleh sejumlah  $n(n-1)/2$  elemen bebas.

Untuk  $n = 2$ , jumlah parameter bebas adalah 1. Hal ini diilustrasikan sebagai berikut.

Misalkan sebuah matriks ortogonal sebarang orde 2

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Fakta bahwa tiap kolom ternormalisasi membawa kita kepada

$$a^2 + b^2 = 1, \tag{1.14}$$

$$c^2 + d^2 = 1. \tag{1.15}$$

Selanjutnya, dua buah kolom ortogonal

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd = 0. \tag{1.16}$$

Solusi umum dari (1.14) adalah  $a = \cos \theta$  dan  $b = \sin \theta$  dengan  $\theta$  sebuah skalar. Dengan cara yang sama solusi dari (1.15) adalah  $c = \cos \phi$  dan  $d = \sin \phi$  dengan  $\phi$  adalah skalar yang lain. Sedangkan (1.16) mensyaratkan

$$\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi = \cos(\theta - \phi) = 0,$$

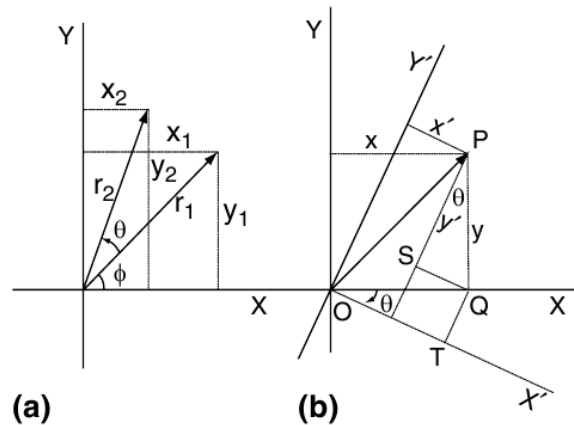
sehingga

$$\phi = \theta \pm \frac{\pi}{2}.$$

Sehingga solusi paling umum matriks ortogonal orde 2 adalah

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

Setiap matriks ortogonal berorde 2 dapat dinyatakan dalam bentuk ini dengan nilai  $\theta$  tertentu. Jelas bahwa determinan  $A_1$  sama dengan 1 dan determinan  $A_2$  sama dengan -1.



Gambar 1.1: Interpretasi matriks ortogonal  $A_1$  yang determinannya  $+1$ . (a) sebagai sebuah operator, merotasikan vektor  $\mathbf{r}_1$  menjadi  $\mathbf{r}_2$  tanpa merubah panjang vektor. (b) sebagai matriks transformasi antara ujung sebuah vektor tetap ketika sumbu koordinatnya dirotasikan. Perhatikan bahwa arah rotasi (b) berlawanan dengan arah rotasi (a).

### 1.3.5 Transformasi Ortogonal dan Matriks Rotasi

Kenyataan bahwa dalam ruang riil, transformasi ortogonal menjaga tetap panjang sebuah vektor menyarankan kepada kita bahwa matriks ortogonal berasosiasi dengan rotasi sebuah vektor. Matriks ortogonal ini berkaitan dengan dua buah jenis rotasi di dalam ruang. Pertama, kita dapat melihatnya sebagai operator yang merotasikan sebuah vektor. Hal ini sering disebut sebagai *transformasi aktif*. Kedua kita dapat melihatnya sebagai matriks transformasi ketika sumbu koordinat dari kerangka acuan dirotasikan. Hal ini dikenal sebagai *transformasi pasif*.

Pertama marilah kita perhatikan vektor pada Gambar 1.1.(a). Komponen  $x$  dan  $y$  dari vektor  $\mathbf{r}_1$  diberikan oleh  $x_1 = r \cos \varphi$  dan  $y_1 = r \sin \varphi$  dengan  $r$  adalah panjang vektor. Sekarang marilah kita rotasikan vektor tersebut berlawanan arah jarum jam sebesar sudut  $\theta$ , sehingga  $x_2 = r \cos(\varphi + \theta)$  dan  $y_2 = r \sin(\varphi + \theta)$ . Dengan menggunakan trigonometri, kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} x_2 &= r \cos(\varphi + \theta) = r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, \\ y_2 &= r \sin(\varphi + \theta) = r \sin \varphi \cos \theta + r \cos \varphi \sin \theta = y_1 \cos \theta + x_1 \sin \theta. \end{aligned}$$

Kita dapat menuliskan koefisien dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa matriks koefisien tidak lain adalah matriks ortogonal  $A_1$  dalam (1.17). Sehingga matriks ortogonal dengan determinan  $+1$  disebut juga matriks rotasi. Matriks ini merotasikan  $\mathbf{r}_1$  menjadi  $\mathbf{r}_2$  tanpa merubah panjang vektor.

Interpretasi kedua dari matriks rotasi adalah sebagai berikut. Misalkan  $P$  adalah ujung sebuah vektor tetap. Koordinat  $P$  adalah  $(x, y)$  dalam sebuah sistem koordinat persegi khusus. Sekarang sumbu koordinatnya dirotasikan searah jarum jam sebesar sudut  $\theta$  seperti yang ditunjukkan Gambar 1.1. **(b)**. Koordinat  $P$  dalam sistem yang dirotasikan menjadi  $(x', y')$ . Dari geometri pada Gambar 1.1. **(b)**, jelas bahwa

$$\begin{aligned}x' &= OT - SQ = OQ \cos \theta - PQ \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta, \\y' &= QT + PS = OQ \sin \theta + PQ \cos \theta = x \sin \theta + y \cos \theta,\end{aligned}$$

atau

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa matriks yang terlibat di sini adalah matriks ortogonal  $A_1$ . Tetapi, kali ini  $A_1$  bertindak sebagai matriks transformasi antara koordinat ujung vektor tetap ketika sumbu koordinatnya dirotasikan.

Ekivalensi antara dua buah interpretasi dapat diharapkan sebelumnya, karena orientasi relatif antara vektor dan sumbu koordinat adalah sama apakah vektor yang dirotasikan berlawanan jarum jam dengan sudut  $\theta$  atau sumbu koordinat dirotasikan searah jarum jam dengan sudut yang sama.

Selanjutnya, marilah kita bahas matriks rotasi  $A_2$  yang memiliki determinan  $-1$ . Matriks  $A_2$  dapat dinyatakan

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Transformasi

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

memberikan

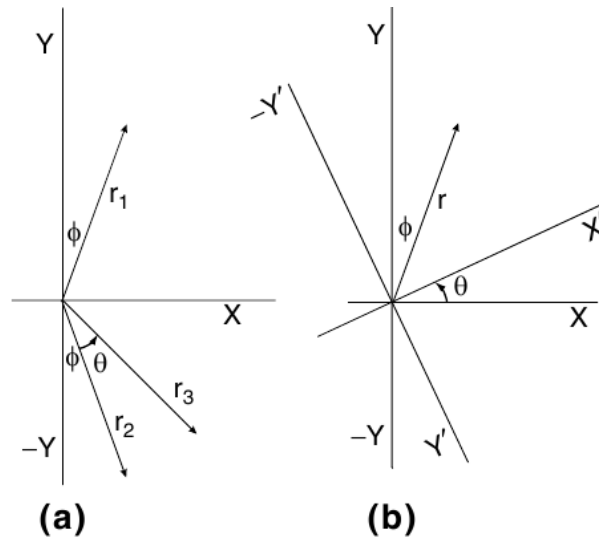
$$x_2 = x_1, \quad y_2 = -y_1.$$

Jelas bahwa di sini hal ini berhubungan dengan pencerminan (refleksi) vektor terhadap sumbu  $-X$ . Sehingga  $A_2$  dapat dipandang sebagai sebuah operator yang pertama membalik vektor  $\mathbf{r}_1$  simetrik sepanjang sumbu  $-X$  kemudian merotasikannya menjadi  $\mathbf{r}_3$  seperti yang terlihat pada Gambar 1.2. **(a)**.

Dalam suku transformasi koordinat, kita dapat menunjukkan  $(x', y')$  dalam persamaan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

merepresentasikan koordinat baru dari ujung sebuah vektor tetap setelah sumbu  $-Y$  dibalik dan sumbu koordinat dirotasikan dengan sudut  $\theta$ , seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.2 **(b)**. Dalam kasus ini kita harus berhati-hati dengan tanda pada sudut. Perjanjian tanda



Gambar 1.2: Dua buah interpretasi matriks ortogonal  $A_2$  yang determinannya  $-1$ . (a) Sebagai sebuah operator, matriks ini membalik vektor  $r_1$  menjadi  $r_2$  simetrik terhadap sumbu  $-X$ , dan kemudian merotasikan  $r_2$  menjadi  $r_3$ . (b) Sebagai matriks transformasi antara ujung vektor tetap ketika sumbu  $-Y$  dibalik dan kemudian sumbu koordinat dirotasikan. Perhatikan bahwa (b) arahnya tampak sama dengan (a).

adalah sebagai berikut, positif ketika arah rotasi berlawanan jarum jam dan negatif ketika searah jarum jam. Tetapi setelah sumbu  $-Y$  dibalik seperti tampak pada Gambar 1.2 (b), rotasi negatif (dalam artian rotasi dari arah sumbu  $-X$  positif melalui sumbu  $-Y$  negatif) muncul berlawanan arah jarum jam. Hal ini mengapa pada Gambar 1.1 (a),(b), vektor dan sumbu koordinat berotasi dalam arah berlawanan, sedangkan dalam Gambar 1.2 (a),(b) tampak berotasi searah.

Sejauh ini kita telah menggunakan rotasi dalam dua dimensi sebagai contoh. Bagaimanapun kesimpulan bahwa matriks ortogonal yang determinannya  $+1$  merepresentasikan rotasi murni dan matriks ortogonal yang determinannya  $-1$  merepresentasikan pencerminan diikuti dengan sebuah rotasi secara umum juga valid untuk dimensi yang lebih tinggi. Kita akan membahas hal ini dalam transformasi vektor.

## 1.4 Diagonalisasi

### 1.4.1 Transformasi Similaritas

Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$  dan  $\mathbf{u}$  adalah matriks kolom  $n \times 1$ , sehingga  $A\mathbf{u}$  adalah matriks kolom yang lain. Maka persamaan

$$A\mathbf{u} = \mathbf{v} \tag{1.18}$$

merepresentasikan transformasi linier. Matriks  $A$  berperilaku sebagai operator linier, merubah vektor  $\mathbf{u}$  menjadi  $\mathbf{v}$ . Misalkan

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

dengan  $u_i$  dan  $v_i$  berturut-turut adalah komponen ke- $i$  dari matriks  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  dalam ruang berdimensi- $n$ . Komponen-komponen ini diukur dalam sistem koordinat (kerangka acuan) tertentu. Misalkan vektor satuan  $\mathbf{e}_i$ , dikenal sebagai basis, sepanjang sumbu koordinat sistem ini adalah

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

maka

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + u_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i. \quad (1.19)$$

Misalkan terdapat sistem koordinat yang lain, dikenal sebagai sistem aksen (*prime*). Jika diukur dalam sistem ini, komponen  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  menjadi

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix} = \mathbf{u}', \quad \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = \mathbf{v}'. \quad (1.20)$$

Kita tekankan di sini bahwa  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{u}'$  adalah vektor yang sama tetapi diukur dalam sistem koordinat yang berbeda. Simbol  $\mathbf{u}'$  tidak berarti sebuah vektor yang berbeda dari  $\mathbf{u}$ , hanya secara sederhana merepresentasikan kumpulan dari komponen  $\mathbf{u}$  dalam sistem aksen seperti yang terlihat pada (1.20). Dengan cara yang sama  $\mathbf{v}$  dan  $\mathbf{v}'$  adalah vektor yang sama. Kita dapat mencari komponen-komponennya jika kita mengetahui komponen  $\mathbf{e}_i$  dalam sistem aksen.

Dalam (1.19)

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n,$$

$\mathbf{u}'$  hanyalah angka yang bebas terhadap sistem koordinat. Untuk mencari komponen  $\mathbf{u}$  dalam koordinat aksen, kita hanya perlu menyatakan  $\mathbf{e}_i$  dalam sistem aksen.

Misalkan  $\mathbf{e}_i$  yang diukur dalam sistem aksen

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix},$$

sehingga komponen  $\mathbf{u}$  yang diukur dalam sistem koordinat ini adalah

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix} &= u_1 \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix} + \dots + u_n \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 s_{11} + u_2 s_{12} + \dots + u_n s_{1n} \\ u_1 s_{21} + u_2 s_{22} + \dots + u_n s_{2n} \\ \vdots \\ u_1 s_{n1} + u_2 s_{n2} + \dots + u_n s_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\mathbf{u}' = T\mathbf{u}, \tag{1.21}$$

dengan

$$T = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Jelas dari analisis di sini bahwa matriks transformasi antara komponen vektor untuk dua buah sistem koordinat adalah sama untuk semua vektor karena hanya bergantung pada transformasi vektor basis dalam dua kerangka acuan. Sehingga  $\mathbf{v}'$  dan  $\mathbf{v}$  juga dihubungkan dengan transformasi matriks  $T$  yang sama

$$\mathbf{v}' = T\mathbf{v}. \tag{1.22}$$

Operasi merubah  $\mathbf{u}$  menjadi  $\mathbf{v}$ , dinyatakan dalam sistem asalnya adalah  $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$ . Jika operasi yang sama dinyatakan dalam koordinat aksen

$$A'\mathbf{u}' = \mathbf{v}'.$$

Karena  $\mathbf{u}' = T\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}' = T\mathbf{v}$ ,

$$A'T\mathbf{u} = T\mathbf{v}.$$

Kalikan kedua ruas dengan invers  $T$  dari kiri

$$T^{-1}A'T\mathbf{u} = T^{-1}T\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Karena  $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$  maka

$$A = T^{-1}A'T. \quad (1.23)$$

Jika kita kalikan persamaan ini dengan  $T$  dari kiri dan  $T^{-1}$  dari kanan, kita mempunyai

$$TAT^{-1} = A'.$$

Apa yang sudah kita temukan adalah sepanjang kita mengetahui hubungan antara sumbu koordinat dari dua buah kerangka acuan, kita tidak hanya bisa mentransformasikan sebuah vektor dari satu kerangka ke kerangka lainnya, tetapi kita juga dapat mentransformasikan matriks yang merepresentasikan sebuah operator linier dari satu kerangka acuan ke yang lain.

Secara umum jika terdapat sebuah matriks non-singular  $T$  (mempunyai invers) sehingga  $T^{-1}AT = B$  untuk sebarang matriks persegi  $A$  dan  $B$  dengan orde yang sama, maka  $A$  dan  $B$  dikatakan matriks *similar* dan transformasi dari  $A$  ke  $B$  dikenal sebagai transformasi similaritas.

Jika dua buah matriks dihubungkan dengan transformasi similaritas, maka matriks tersebut merepresentasikan transformasi linier yang sama dalam dua kerangka acuan/sistem koordinat yang berbeda.

Jika sumbu koordinat persegi dalam sistem aksien dibangkitkan oleh rotasi dari sistem asalnya, maka  $T$  merupakan matriks ortogonal seperti yang dibahas pada Subbab 1.3. Dalam kasus tersebut  $T^{-1} = \tilde{T}$  dan transformasi similaritasnya dapat dituliskan sebagai  $\tilde{T}AT$ . Jika kita bekerja pada ruang kompleks, matriks transformasinya adalah matriks uniter, dan transformasi similaritasnya adalah  $T^\dagger AT$ . Dua buah transformasi ini dikenal sebagai transformasi similaritas uniter.

Sebuah matriks yang dapat dibuat bentuknya menjadi matriks diagonal melalui transformasi similaritas disebut terdiagonalkan (*diagonalizable*). Apakah sebuah matriks terdiagonalkan dan bagaimana mendiagonalkannya merupakan pertanyaan yang sangat penting dalam teori transformasi linier. Bukan hanya karena lebih mudah bekerja dengan matriks diagonal, tetapi juga karena merupakan struktur dasar mekanika kuantum. Dalam subbab berikut, kita akan menjawab pertanyaan ini.

### 1.4.2 Diagonalisasi Matriks Persegi

Vektor eigen  $A$  dapat digunakan untuk membentuk matriks  $S$  sehingga  $S^{-1}AS$  menjadi sebuah matriks diagonal. Proses ini membuat permasalahan fisika menjadi jauh lebih sederhana dengan memilih variabel yang lebih baik.

Jika  $A$  adalah matriks persegi berorde  $n$ , nilai eigen  $\lambda_i$  dan vektor eigen  $\mathbf{x}_i$  memenuhi persamaan

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i, \quad (1.24)$$

untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ . Tiap vektor eigen adalah matriks kolom dengan elemen sejumlah  $n$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tiap  $n$  pada (1.24) memiliki bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i x_{i1} \\ \lambda_i x_{i2} \\ \vdots \\ \lambda_i x_{in} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Secara kolektif dapat kita tuliskan

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{21} & \cdots & \lambda_n x_{n1} \\ \lambda_1 x_{12} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1n} & \lambda_2 x_{2n} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Untuk menyederhanakan penulisan, misalkan

$$S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

dan

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

dan menuliskan (1.26) sebagai

$$AS = SA. \quad (1.29)$$



Dengan mengalikan dua buah ruas dengan  $S^{-1}$  dari kiri, kita memperoleh

$$S^{-1}AS = A. \quad (1.30)$$

Sehingga dengan menggunakan vektor eigen dan invers dari matriks, kita bisa mentransformasikan sebuah matriks  $A$  dalam bentuk matriks diagonal yang elemennya adalah nilai eigen dari  $A$ . Transformasi (1.30) dikenal sebagai diagonalisasi matriks  $A$ .

**Contoh 1.4.1.** Jika  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , carilah  $S$  sehingga  $S^{-1}AS$  adalah matriks diagonal.

Tunjukkan bahwa  $S^{-1}AS$  adalah nilai eigen dari  $A$ .

**Solusi 1.4.1.** karena persamaan sekularnya adalah

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0,$$

nilai eigennya adalah  $\lambda_1 = -1$  dan  $\lambda_2 = 3$ . Vektor eigennya adalah  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  dan

$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Sehingga

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mudah untuk dicek bahwa  $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  dan

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa dalam pendagonalan matriks,  $S$  tidak harus uniter. Tetapi jika vektor eigennya ortogonal, maka kita dapat menormalisasi vektor eigen dan membentuk sebuah himpunan ortonormal. matriks dengan anggota himpunan ortonormal ini sebagai kolom merupakan matriks uniter. Proses diagonalisasi menjadi transformasi similaritas uniter yang lebih umum dan berguna.

Dua buah vektor eigen pada contoh di atas ortogonal karena

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Normalisasinya menghasilkan

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matriks yang dibangun dengan dua buah vektor eigen ternormalisasi adalah

$$U = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

yang merupakan sebuah matriks ortogonal. Transformasi

$$\tilde{U}AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

merupakan transformasi similaritas uniter.

Pertama kita telah mengeliminasi langkah untuk mencari invers dari  $U$ , karena  $U$  adalah matriks ortogonal, invers dari  $U$  tidak lain adalah transposnya. Lebih penting dari itu,  $U$  adalah matriks rotasi seperti yang didiskusikan pada Subbab 1.3. Jika kita merotasikan sumbu koordinat asal agar berimpit dengan  $\mathbf{u}_1$  dan  $\mathbf{u}_2$ , maka  $A$  adalah matriks diagonal terhadap sumbu yang dirotasikan.

Sumbu koordinat dari sistem acuan, dengan matriks diagonal, disebut sebagai sumbu utama. dalam contoh ini  $\mathbf{u}_1$  dan  $\mathbf{u}_2$  adalah vektor satuan sepanjang sumbu utama. Dari komponen  $\mathbf{u}_1$ , kita dengan mudah mencari orientasi sumbu utama. Misalkan  $\theta_1$  adalah sudut antara  $\mathbf{u}_1$  dengan sumbu horizontal asal, sehingga

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

yang memberikan  $\theta_1 = -\pi/4$ . Hal ini berarti untuk mendapatkan sumbu utama, kita harus merotasikan koordinat asal sebesar  $45^\circ$  searah dengan jarum jam. Untuk pengecekan yang konsisten, kita dapat menghitung  $\theta_2$ , sudut antara  $\mathbf{u}_2$  dengan sumbu horizontal asal, sehingga

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

yang memberikan  $\theta_2 = +\pi/4$ . Sehingga sudut antara  $\theta_1$  dengan  $\theta_2$  adalah  $\pi/2$  sebagaimana mestinya untuk dua buah vektor yang saling tegak lurus dalam ruang 2 dimensi.

Karena  $\theta_2 = \pi/2 + \theta_1$ ,  $\cos \theta_2 = -\sin \theta_1$  dan  $\sin \theta_2 = \cos \theta_1$ , maka matriks uniter  $U$  dapat dituliskan

$$U = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix},$$

yang tidak lain adalah matriks seperti yang terlihat pada (1.17).

### 1.4.3 Bentuk Kuadratik

Bentuk kuadratik adalah sebuah pernyataan homogen berderajat dua dalam variabel  $n$ . Sebagai contoh

$$Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

adalah bentuk kuadratik dalam  $x_1$  dan  $x_2$ . Dengan merubah variabel, ekspresi ini dapat diubah sehingga tidak terdapat suku silang. Bentuk tanpa suku silang ini dinamakan sebagai bentuk kanonik. Bentuk kuadratik ini sangatlah penting karena banyak sekali aplikasinya dalam fisika.

Langkah pertama untuk merubah dalam bentuk kanonik adalah dengan membagi suku silangnya menjadi dua bagian sama besar, ( $4x_1x_2 = 2x_1x_2 + 2x_2x_1$ ), sehingga  $Q(x_1, x_2)$  dapat kita tuliskan

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

dengan matriks koefisien

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

merupakan matriks simetrik. Seperti akan kita lihat dalam Subbab 1.5 bahwa matriks simetrik selalu bisa didiagonalkan. Dalam kasus khusus ini, pertama kita akan mencari nilai eigen dan vektor eigen dari  $C$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0.$$

Vektor eigen untuk  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = 6$  berturut-turut adalah

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga matriks ortogonalnya

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

akan mendiagonalkan matriks koefisiennya

$$\tilde{U}CU = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Jika kita merubah variabel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dan mengambil transposnya kedua ruas

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \tilde{U},$$

kita dapat menuliskan (1.31) sebagai

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \tilde{U}CU \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + 6u_2^2, \quad (1.32)$$

yang merupakan bentuk kanonik (tidak mempunyai suku silang).

Perhatikan pula bahwa matriks transformasi  $T$  yang dinyatakan pada (1.21) sama dengan  $\tilde{U}$ .

**Contoh 1.4.2.** Tunjukkan bahwa persamaan berikut

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 2\sqrt{5}x - 4\sqrt{6}y = 15$$

merupakan sebuah elips dengan mentransformasikannya menjadi sebuah bentuk irisan kerucut. Di manakah pusat dan berapakah panjang sumbu mayor dan minornya?

**Solusi 1.4.2.** Suku kuadratik persamaan tersebut dapat kita tuliskan

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks koefisiennya diberikan oleh

$$\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 10) = 0.$$

Vektor eigen ternormalisasi untuk  $\lambda_1 = 5$  dan  $\lambda_2 = 10$  berturut-turut adalah

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga matriks ortogonalnya

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

akan mendiagonalkan matriks koefisiennya

$$\tilde{U}CU = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Misalkan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

yang ekuivalen dengan

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'),$$

maka persamaannya dapat dituliskan

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \tilde{U}CU \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') - 4\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') = 15$$

atau

$$\begin{aligned} 5x'^2 + 10y'^2 - 10x' &= 15, \\ x'^2 + 2y'^2 - 2x' &= 3. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan  $(x' - 1)^2 = x'^2 - 2x' + 1$ , persamaan terakhirnya menjadi

$$(x' - 1)^2 + 2y'^2 = 4,$$

atau

$$\frac{(x' - 1)^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1,$$

yang merupakan bentuk standar sebuah elips. Pusat elipsnya berada pada  $x = 1/\sqrt{5}$  dan  $y = 2/\sqrt{5}$  (berkaitan dengan  $x' = 1$  dan  $y' = 0$ ). Panjang sumbu mayor adalah  $2\sqrt{4} = 4$  dan panjang sumbu minor adalah  $2\sqrt{2}$ .

Untuk mentransformasikan persamaannya dalam bentuk standar, kita telah merotasikan sumbu koordinat. Sumbu mayornya terletak sepanjang  $\mathbf{v}_1$  dan sumbu minornya terletak sepanjang  $\mathbf{v}_2$ . Karena

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sumbu mayor elips membuat sudut  $\theta$  terhadap sumbu horizontal koordinat dan  $\theta = \cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ .

## 1.5 Matriks Hermitian dan Matriks Simetrik

### 1.5.1 Definisi

#### *Matriks Riil*

Jika  $A^* = A$  maka  $a_{ij} = a_{ij}^*$ . Karena tiap elemen matriks riil, maka matriks ini dinamakan matriks riil.

#### *Matriks Imajiner*

Jika  $A^* = -A$ , hal ini mengimplikasikan bahwa  $a_{ij} = -a_{ij}^*$ . Tiap elemen matriks ini imajiner atau nol, sehingga dikatakan matriks imajiner.

#### *Matriks Hermitian*

Sebuah matriks persegi dikatakan hermitian jika  $A^\dagger = A$ . Mudah untuk dibuktikan bahwa elemen sebuah matriks hermitian memenuhi hubungan  $a_{ij}^* = a_{ji}$ . Matriks hermitian sangat penting dalam mekanika (fisika) kuantum.

#### *Matriks Simetrik*

Jika semua elemen matriks riil, maka matriks hermitian hanyalah matriks simetrik. Matriks simetrik sangatlah berguna dalam fisika klasik.

*Matriks Antihhermitian dan Matriks Antisimetrik*

Sebuah matriks dinamakan anti hermitian atau *skew-hermitian* jika

$$A^\dagger = -A, \quad (1.33)$$

yang mengimplikasikan  $a_{ij}^* = -a_{ji}$ .

Jika elemen semua matriks anti hermitian semuanya riil, maka matriks ini hanyalah matriks anti simetrik.

### 1.5.2 Nilai Eigen Matriks Hermitian

- Nilai eigen sebuah matriks hermitian (matriks simetrik riil) semuanya riil.

Misalkan  $A$  adalah matriks hermitian dan  $\mathbf{x}$  adalah vektor eigen non trivial untuk nilai eigen  $\lambda$  yang memenuhi persamaan

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (1.34)$$

Ambil konjugasi hermitian dari persamaan di atas

$$\mathbf{x}^\dagger A^\dagger = \lambda^* \mathbf{x}^\dagger. \quad (1.35)$$

Perhatikan bahwa  $\lambda$  hanyalah sebuah bilangan (riil maupun kompleks) sehingga konjugat hermitiannya tidak lain adalah konjugat kompleksnya. Karena hanya sebuah bilangan, maka tidak menjadi masalah untuk mengalikan dari kanan ataupun kiri.

Kalikan (1.34) dengan  $\mathbf{x}^\dagger$  dari kiri

$$\mathbf{x}^\dagger A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}.$$

Kalikan (1.35) dengan  $\mathbf{x}$  dari kanan

$$\mathbf{x}^\dagger A^\dagger\mathbf{x} = \lambda^*\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}.$$

Kurangkan persamaan ini dengan persamaan sebelumnya

$$(\lambda - \lambda^*)\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = \mathbf{x}^\dagger (A - A^\dagger) \mathbf{x},$$

tetapi  $A$  hermitian  $A = A^\dagger$  sehingga

$$(\lambda - \lambda^*)\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = 0,$$

karena  $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} \neq 0$ , maka  $\lambda = \lambda^*$  dan  $\lambda$  riil.

Untuk matriks riil simetrik pembuktiannya juga identik, karena untuk matriks riil, matriks hermitian adalah matriks riil simetrik.

- Jika dua buah nilai eigen matriks hermitian (matriks riil simetrik) berbeda, maka vektor eigennya ortogonal.

Misalkan

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1,$$

$$A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2.$$

Kalikan persamaan pertama dengan  $\mathbf{x}_2^\dagger$  dari kiri

$$\mathbf{x}_2^\dagger A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_2^\dagger\mathbf{x}_1.$$

Ambil konjugasi hermitian persamaan kedua dan kalikan dengan  $\mathbf{x}$  dari kanan

$$\mathbf{x}_2^\dagger A\mathbf{x}_1 = \lambda_2\mathbf{x}_2^\dagger\mathbf{x}_1,$$

kita telah menggunakan  $(A\mathbf{x}_2)^\dagger = \mathbf{x}_2^\dagger A^\dagger$ ,  $A^\dagger = A$  dan  $\lambda_2 = \lambda_2^*$ . Dengan mengurangkan dua buah persamaan kita mempunyai

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_2^\dagger\mathbf{x}_1 = 0.$$

Karena  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , maka

$$\mathbf{x}_2^\dagger\mathbf{x}_1 = 0.$$

Maka  $\mathbf{x}_1$  dan  $\mathbf{x}_2$  ortogonal. Pembuktian untuk matriks riil simetrik juga sama.

### 1.5.3 Pendiagonalan Matriks Hermitian

- Sebuah matriks hermitian (atau riil simetrik) dapat didiagonalkan dengan matriks uniter (ortogonal riil).

Jika nilai eigen sebuah matriks semuanya berbeda, maka matriks tersebut dapat didiagonalkan dengan menggunakan transformasi similaritas seperti yang sudah kita bicarakan sebelumnya. Di sini kita hanya perlu menunjukkan bahwa meskipun nilai eigennya berdegenerasi, sepanjang matriksnya hermitian, maka matriks tersebut bisa didiagonalkan. Kita akan membuktikan dengan membangun sebuah matriks uniter yang akan mendiagonalkan sebuah matriks uniter berdegenerasi.

Misalkan  $\lambda_1$  merupakan nilai eigen berulang dari matriks hermitian  $H$  orde  $n \times n$ , kemudian misalkan  $\mathbf{x}_1$  adalah vektor eigen untuk nilai eigen  $\lambda_1$ . Kita dapat mengambil vektor bebas linier  $n$  sebarang dengan kondisi hanya yang pertama  $\mathbf{x}_1$  dan dengan proses Gram-Schmidt membentuk sebuah himpunan ortonormal untuk vektor sejumlah  $n$  yaitu  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ , masing-masing memiliki elemen sebanyak  $n$ .

Misalkan  $U_1$  adalah matriks dengan  $\mathbf{x}_i$  sebagai kolom ke- $i$

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

seperti yang sudah kita tunjukkan bahwa hal ini membuat  $U_1$  sebuah matriks uniter. Transformasi uniter  $U_1^\dagger H U_1$  memiliki nilai eigen yang sama persis dengan  $H$ , karena matriks tersebut memiliki polinomial karakteristik yang sama

$$\begin{aligned} |U_1^\dagger H U_1 - \lambda I| &= |U_1^{-1} H U_1 - \lambda U_1^{-1} U| = |U_1^{-1} (H - \lambda I) U_1| \\ &= |U_1^{-1}| |(H - \lambda I)| |U_1| = |(H - \lambda I)|. \end{aligned}$$

Selanjutnya karena  $H$  hermitian  $U_1^\dagger H U_1$  juga hermitian karena

$$(U_1^\dagger H U_1)^\dagger = (H U_1)^\dagger (U_1^\dagger)^\dagger = U_1^\dagger H^\dagger U_1 = U_1^\dagger H U_1.$$

Sekarang

$$\begin{aligned} U_1^\dagger H U_1 &= \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & h_{12} & \cdots & h_{n1} \\ \lambda_1 x_{12} & h_{22} & \cdots & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dengan kenyataan bahwa  $\mathbf{x}_1$  adalah vektor eigen dari  $H$  untuk nilai eigen  $\lambda_1$

$$H \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix},$$

dan menuliskan

$$H \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \\ \vdots \\ h_{in} \end{pmatrix},$$



untuk  $i \neq 1$ . Selanjutnya

$$\begin{aligned}
 U_1^\dagger H U_1 &= \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & h_{21} & \cdots & h_{n1} \\ \lambda_1 x_{12} & h_{22} & \cdots & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Kolom pertama ditentukan oleh kondisi ortonormal

$$\begin{pmatrix} x_{i1}^* & x_{i2}^* & \cdots & x_{in}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 1, \\ 0, & \text{jika } i \neq 1. \end{cases}$$

Baris pertama haruslah transpos dari kolom pertama karena  $U_1^\dagger H U_1$  adalah matriks hermitian (atau riil simetrik) dan  $\lambda_1$  riil dan kompleks konjugat dari nol adalah dirinya sendiri. Fakta krusial dari proses ini adalah elemen ke  $n-1$  terakhir dari baris pertama adalah semuanya nol. Hal ini yang membedakan matriks hermitian (atau riil simetrik) dengan matriks persegi lainnya.

Jika  $\lambda_1$  nilai eigen  $H$  berdegenerasi 2, maka dalam polinomial karakteristik  $p(\lambda) = |H - \lambda I|$  terdapat faktor  $(\lambda_1 - \lambda)^2$ . Karena

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= |H - \lambda I| = \left| U_1^\dagger H U_1 - \lambda I \right| \\
 &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda_1 - \lambda) \begin{vmatrix} \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

suku

$$\begin{vmatrix} \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

harus memiliki faktor  $(\lambda_1 - \lambda)$ . Dengan kata lain jika kita mendefinisikan  $H_1$  sebagai submatriks  $(n-1) \times (n-1)$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = H_1,$$

maka  $\lambda_1$  haruslah merupakan nilai eigen dari  $H_1$ . Sehingga kita bisa mengulangi proses ini dan membentuk himpunan ortonormal dari sejumlah  $n-1$  vektor kolom dengan yang pertama adalah vektor eigen  $H_1$  untuk nilai eigen  $\lambda_1$ . Misalkan himpunan ortonormal ini

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{22} \\ y_{23} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{32} \\ y_{33} \\ \vdots \\ y_{3n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{y}_{n-1} = \begin{pmatrix} y_{n2} \\ y_{n3} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},$$

dan  $U_2$  adalah matriks uniter lain yang didefinisikan

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & y_{32} & \cdots & y_{n2} \\ 0 & y_{23} & y_{33} & \cdots & y_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{2n} & y_{3n} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

transformasi uniter  $U_2^\dagger (U_1^\dagger H U_1) U_2$  dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} U_2^\dagger (U_1^\dagger H U_1) U_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22}^* & y_{23}^* & \cdots & y_{2n}^* \\ 0 & y_{32}^* & y_{33}^* & \cdots & y_{3n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{n2}^* & y_{n3}^* & \cdots & y_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & y_{32} & \cdots & y_{n2} \\ 0 & y_{23} & y_{33} & \cdots & y_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{2n} & y_{3n} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \cdots & \beta_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{3n} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jika  $\lambda_1$  berdegenerasi sebanyak  $m$  buah, kita dapat mengulang proses ini  $m$  kali. Sisanya dapat didiagonalkan dengan vektor eigen untuk nilai eigen yang berbeda. Setelah matriks  $n \times n$  ditransformasikan  $n - 1$  kali, matriksnya menjadi diagonal.

Marilah kita definisikan

$$U = U_1 U_2 \cdots U_{n-1},$$

maka  $U$  adalah matriks uniter karena semua  $U_i$  uniter. Dari sini, matriks hermitian  $H$  didiagonalkan dengan transformasi uniter  $U^\dagger H U$  dan teormanya telah dibuktikan.

Konstruksi ini membawa kita kepada akibat wajar yang sangat penting

- Setiap matriks hermitian (atau riil simetrik)  $n \times n$  memiliki sejumlah  $n$  vektor eigen ortogonal tanpa memandang jumlah degenerasi nilai eigen.

Hal ini karena  $U^\dagger H U = \Lambda$  dengan elemen matriks diagonal  $\Lambda$  adalah nilai eigen dari  $H$ . Karena  $U^\dagger = U^{-1}$ , maka dari persamaan  $U(U^\dagger H U) = U \Lambda$  yaitu  $H U = U \Lambda$ , yang menunjukkan bahwa tiap kolom dari  $U$  adalah vektor eigen ternormalisasi dari  $H$ .

Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana prosedur ini bekerja.

**Contoh 1.5.1.** Carilah matriks uniter yang mendiagonalkan matriks hermitian

$$H = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

**Solusi 1.5.1.** Nilai eigen  $H$  adalah akar dari polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & i & 1 \\ -i & 2 - \lambda & i \\ 1 & -i & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Maka nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 0.$$

Jelas terlihat di sini  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$  yaitu berdegenerasi 2. Misalkan satu vektor eigen untuk  $\lambda_1$  adalah

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

sehingga

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda_1 & i & 1 \\ -i & 2 - \lambda_1 & i \\ 1 & -i & 2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & i & 1 \\ -i & -1 & i \\ 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Tiga buah persamaan

$$\begin{aligned} -x_1 + ix_2 + x_3 &= 0, \\ -ix_1 - x_2 + ix_3 &= 0, \\ x_1 - ix_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

adalah identik satu sama lain. Sebagai contoh jika kita mengalikan persamaan kedua dengan  $i$  kita akan mendapatkan persamaan ketiga (persamaan kedua didapatkan dari persamaan pertama dikalikan  $i$ ). Persamaan

$$x_1 - ix_2 - x_3 = 0 \tag{1.36}$$

memiliki solusi yang tak hingga. Pilihan sederhana adalah  $x_2 = 0$  sehingga  $x_1 = x_3$ . Maka

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

merupakan sebuah vektor eigen. Tentu

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bebas linier. Sekarang marilah kita gunakan proses Gram-Schmidt untuk mendapatkan himpunan ortonormal  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{\|\mathbf{E}_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{E}_2$  sudah ternormalisasi dan tegak lurus dengan  $\mathbf{E}_1$  dan tentunya  $\mathbf{x}_1$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

kemudian  $\mathbf{x}'_3$  dapat dihitung yaitu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_3 &= \mathbf{E}_3 - (\mathbf{E}_3, \mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 - (\mathbf{E}_3, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[ (1 \ 0 \ 0) \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[ (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{x}'_3}{\|\mathbf{x}'_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Membentuk sebuah matriks uniter dengan  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$

$$U_1 = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Transformasi similaritas uniter  $H$  oleh  $U_1$  adalah

$$\begin{aligned}U_1^\dagger H U_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{2}i \\ 0 & \sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Karena  $H$  dan  $U_1^\dagger H U_1$  memiliki himpunan nilai eigen yang sama, maka  $\lambda = 3$  dan  $\lambda = 0$  haruslah merupakan nilai eigen dari submatriks

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2}i \\ \sqrt{2}i & 1 \end{pmatrix}.$$

Hal ini juga bisa ditunjukkan secara langsung. Dua buah vektor eigen  $H_1$  berkaitan dengan  $\lambda = 3$  dan  $\lambda = 0$  dapat dicari berturut-turut adalah

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3}i \\ \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}i & \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}i \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned} U &= U_1 U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}i & \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}i & \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dapat dengan mudah dihitung bahwa

$$\begin{aligned} U^\dagger H U &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3}i & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}i & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}i & \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

yang juga merupakan matriks diagonal dan elemen diagonalnya adalah nilai eigen. Selanjutnya tiga buah kolom dari  $U$  adalah tiga buah vektor eigen  $H$  yang saling ortogonal.

$$\begin{aligned} H \mathbf{u}_1 &= \lambda_1 \mathbf{u}_1 : \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \\ H \mathbf{u}_2 &= \lambda_2 \mathbf{u}_2 : \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3}i \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3}i \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \\ H \mathbf{u}_3 &= \lambda_3 \mathbf{u}_3 : \begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ -i & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

---

Kita telah mengikuti langkah pembuktian untuk mengilustrasikan prosedur. Ketika sudah mapan, kita dapat menggunakan teorema dan proses mencari vektor eigen dapat lebih disederhanakan.

---

Dalam contoh ini kita dapat mencari vektor eigen untuk nilai eigen tak berdegenerasi dengan cara biasa. Untuk nilai eigen berdegenerasi  $\lambda = 3$ , komponen vektor eigennya  $(x_1, x_2, x_3)$  harus memenuhi

$$x_1 - ix_2 - x_3 = 0,$$

seperti ditunjukkan pada (1.36). Persamaan ini dapat dituliskan sebagai  $x_2 = i(x_3 - x_1)$ , sehingga secara umum

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ i(x_3 - x_1) \\ x_3 \end{pmatrix},$$

dengan  $x_1$  dan  $x_3$  sebarang. Terlihat bahwa pemilihan  $x_1 = x_3$ ,  $\mathbf{u}_1$  adalah vektor eigen ternormalisasi

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vektor eigen yang lain harus memenuhi persamaan yang sama dan ortogonal terhadap  $\mathbf{u}_1$ . Sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ i(x_3 - x_1) \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

yang memberikan  $x_1 + x_3 = 0$  atau  $x_3 = -x_1$ . Dengan normalisasi vektor  $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ , kita mendapatkan vektor eigen lain untuk  $\lambda = 3$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

#### 1.5.4 Diagonalisasi Simultan

Jika  $A$  dan  $B$  adalah dua buah matriks hermitian dengan orde yang sama, sebuah pertanyaan penting muncul dari sini. Apakah matriks ini bisa didiagonalkan secara simultan dengan sebuah matriks  $S$ ? Atau dengan kata lain, apakah terdapat sebuah basis sehingga keduanya diagonal? Jawabannya adalah iya, jika matriks tersebut komut.

Pertama kita akan menunjukkan bahwa keduanya bisa didiagonalkan simultan dan kemudian menunjukkan bahwa keduanya komut. Yaitu, jika

$$D_1 = S^{-1}AS \quad \text{dan} \quad D_2 = S^{-1}BS,$$

dengan  $D_1$  dan  $D_2$  adalah matriks diagonal, sehingga  $AB = BA$ .

Hal ini berasal dari

$$\begin{aligned} D_1 D_2 &= S^{-1} A S S^{-1} B S = S^{-1} A B S, \\ D_2 D_1 &= S^{-1} B S S^{-1} A S = S^{-1} B A S. \end{aligned}$$

Karena matriks diagonal dengan orde sama selalu komut ( $D_1 D_2 = D_2 D_1$ ), kita mempunyai

$$S^{-1} A B S = S^{-1} B A S.$$

Dengan mengalikan  $S$  dari kiri dan  $S^{-1}$  dari kanan, kita mempunyai  $AB = BA$ .

Sekarang kita akan membuktikan bahwa kebalikannya juga benar. Dalam artian jika keduanya komut, maka keduanya dapat didiagonalkan simultan. Pertama, misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks  $2 \times 2$ . Karena matriks hermitian selalu bisa didiagonalkan, misalkan  $S$  adalah matriks uniter yang mendiagonalkan  $A$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

dengan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah nilai eigen dari  $A$ . Misalkan

$$S^{-1} B S = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Sekarang

$$\begin{aligned} S^{-1} A B S &= S^{-1} A S S^{-1} B S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \lambda_1 & b_{12} \lambda_1 \\ b_{21} \lambda_2 & b_{22} \lambda_2 \end{pmatrix}, \\ S^{-1} B A S &= S^{-1} B S S^{-1} A S = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \lambda_1 & b_{12} \lambda_2 \\ b_{21} \lambda_1 & b_{22} \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Karena  $AB = BA$  maka  $S^{-1} A B S = S^{-1} B A S$

$$\begin{pmatrix} b_{11} \lambda_1 & b_{12} \lambda_1 \\ b_{21} \lambda_2 & b_{22} \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \lambda_1 & b_{12} \lambda_2 \\ b_{21} \lambda_1 & b_{22} \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Dari sini kita mendapatkan

$$b_{21} \lambda_2 = b_{21} \lambda_1, \quad \text{dan} \quad b_{12} \lambda_1 = b_{12} \lambda_2.$$

Jika  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , maka  $b_{12} = b_{21} = 0$ . Dengan kata lain

$$S^{-1} B S = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Dengan kata lain  $A$  dan  $B$  terdiagonalkan secara simultan.

Jika  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , kita tidak dapat menarik kesimpulan  $S^{-1} B S$  diagonal. Dalam kasus ini

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$



Selanjutnya karena  $B$  hermitian, maka transformasi similaritas  $S^{-1}BS$  juga hermitian, sehingga  $S^{-1}BS$  bisa didiagonalkan. Misalkan  $T$  adalah matriks uniter yang mendiagonalkan  $S^{-1}BS$

$$T^{-1}(S^{-1}BS)T = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 \\ 0 & \lambda'_2 \end{pmatrix}.$$

Di lain pihak

$$T^{-1}(S^{-1}AS)T = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} T^{-1}T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Sehingga perkalian matriks  $U = ST$  mendiagonalkan  $A$  dan  $B$ . Sehingga tanpa atau dengan degenerasi, sepanjang  $A$  dan  $B$  komut, maka keduanya dapat didiagonalkan simultan.

Meskipun kita hanya menggunakan matriks  $2 \times 2$ , “bukti” yang sama dapat dengan mudah digunakan untuk matriks dengan orde lebih tinggi.

**Contoh 1.5.2.** Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Apakah  $A$  dan  $B$  dapat didiagonalkan secara simultan? Jika bisa, carilah matriks uniter  $U$  yang bisa mendiagonalkannya!

**Solusi 1.5.2.**

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Maka  $[A, B] = 0$ , sehingga keduanya dapat didiagonalkan simultan

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Vektor eigen ternormalisasinya untuk  $\lambda = 1$  dan  $\lambda = 3$  berturut-turut

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S^{-1}AS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}BS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sehingga keduanya terdiagonalkan simultan. Hal ini juga menunjukkan bahwa 1 dan 5 merupakan nilai eigen dari matriks  $B$ . Hal ini dapat dengan mudah diverifikasi karena

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0.$$

Jika kita mendiagonalkan  $B$  terlebih dahulu, kita akan mendapatkan hasil yang benar-benar sama.

## 1.6 Matriks Normal

Sebuah matriks persegi dikatakan sebagai matriks normal jika dan hanya jika matriks tersebut komut dengan konjugat hermitiannya. Maka  $A$  sebuah matriks normal jika dan hanya jika

$$AA^\dagger = A^\dagger A. \quad (1.37)$$

Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa semua matriks hermitian (atau riil simetrik), anti hermitian (atau riil anti simetrik) dan uniter (atau riil ortogonal) merupakan matriks normal. Hal yang harus kita lakukan adalah mengganti matriks ini dalam (1.37). Dengan sifat dari definisi, jelas bahwa dua buah sisi persamaan tersebut sama.

Sejauh ini kita telah menunjukkan bahwa matriks hermitian dapat didiagonalkan dengan menggunakan transformasi similaritas uniter. Apa yang akan kita lihat adalah generalisasi dari teorema ini yaitu setiap matriks normal dapat didiagonalkan.

Pertama jika diberikan matriks persegi  $A$ , semua elemennya diketahui, sehingga kita dapat mengambil konjugat hermitiannya  $A^\dagger$ . Kemudian misalkan

$$B = \frac{1}{2} (A + A^\dagger),$$

$$C = \frac{1}{2i} (A - A^\dagger).$$

Sehingga

$$A = B + iC, \quad (1.38)$$

karena  $(A^\dagger)^\dagger = A$  dan  $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$

$$B^\dagger = \frac{1}{2} (A + A^\dagger)^\dagger = \frac{1}{2} (A^\dagger + A) = B,$$

$$C^\dagger = \frac{1}{2i^*} (A - A^\dagger)^\dagger = -\frac{1}{2i} (A^\dagger - A) = C.$$

Sehingga  $B$  dan  $C$  semuanya hermitian. Dengan kata lain semua matriks simetrik dapat didekomposisi menjadi dua buah matriks hermitian seperti pada (1.38). Selanjutnya

$$\begin{aligned} BC &= \frac{1}{4i} (A^2 - AA^\dagger + A^\dagger A - A^{\dagger 2}) \\ CB &= \frac{1}{4i} (A^2 - A^\dagger A + AA^\dagger - A^{\dagger 2}). \end{aligned}$$

Jelas bahwa jika  $A^\dagger A = AA^\dagger$ , maka  $BC = CB$ . Dengan kata lain jika  $A$  matriks normal maka  $B$  dan  $C$  komut.

Kita telah menunjukkan dalam Subbab 1.3 bahwa jika  $B$  dan  $C$  komut maka keduanya bisa didiagonalkan simultan. Dalam artian, kita dapat mencari sebuah matriks uniter  $S$  sehingga  $S^{-1}BS$  dan  $S^{-1}CS$  semuanya diagonal. Karena

$$S^{-1}AS = S^{-1}BS + iS^{-1}CS,$$

sehingga  $S^{-1}AS$  haruslah diagonal.

Sebaliknya, jika  $S^{-1}AS = D$  diagonal, maka

$$(S^{-1}AS)^\dagger = S^{-1}A^\dagger S = D^\dagger = D^*,$$

karena  $S$  matriks uniter dan  $D$  matriks diagonal. Maka:

$$\begin{aligned} S^{-1}AA^\dagger S &= (S^{-1}AS) (S^{-1}A^\dagger S) = DD^*, \\ S^{-1}A^\dagger AS &= (S^{-1}A^\dagger S) (S^{-1}AS) = D^*D. \end{aligned}$$

Karena  $DD^* = D^*D$ , maka kita menyimpulkan

- Sebuah matriks dapat didiagonalkan dengan transformasi similaritas uniter jika dan hanya jika matriks tersebut matriks normal.

Sehingga baik matriks hermitian maupun matriks uniter keduanya dapat didiagonalkan dengan transformasi similaritas uniter.

Nilai eigen dari matriks hermitian selalu riil. Hal ini mengapa dalam mekanika kuantum kuantitas fisis yang teramati berkaitan dengan nilai eigen operator hermitian, karena hasil pengukuran pastilah merupakan bilangan riil. Tetapi vektor eigen dari matriks hermitian bisa kompleks, sehingga matriks uniter yang mendiagonalkan matriks hermitian, secara umum, juga kompleks.

Sebuah matriks riil simetrik juga merupakan matriks hermitian, sehingga nilai eigennya haruslah juga riil. Karena matriks dan nilai eigen semuanya riil, maka vektor eigennya juga bisa diambil riil. Sehingga matriks pendagonalnya juga merupakan matriks riil ortogonal.

Matriks uniter, termasuk matriks riil ortogonal, dapat didiagonalkan dengan transformasi similaritas uniter. Tetapi secara umum, nilai eigen dan vektor eigen matriks uniter adalah kompleks. Maka matriks pendagonalnya bukan merupakan matriks riil ortogonal, melainkan matriks uniter kompleks. Sebagai contoh, matriks rotasi adalah matriks riil ortogonal, tetapi hanya bisa didiagonalkan dengan matriks uniter kompleks.

## 1.7 Fungsi sebuah Matriks

### 1.7.1 Fungsi Polinomial sebuah Matriks

Matriks persegi sebarang  $A$  dapat dikalikan dengan dirinya sendiri. Hukum asosiatif dari perkalian matriks menjamin perkalian  $A$  dengan dirinya sendiri sebanyak  $n$  kali, yang dinyatakan dengan  $A^n$ , merupakan operasi tak ambigu. Maka

$$A^m A^n = A^{m+n}.$$

Selanjutnya kita telah mendefinisikan invers sebuah matriks non singular  $A^{-1}$  sehingga  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ . Sehingga secara alami kita bisa mendefinisikan

$$A^0 = A^{1-1} = AA^{-1} = I, \quad \text{dan} \quad A^{-n} = (A^{-1})^n.$$

Dengan definisi ini, kita bisa mendefinisikan fungsi polinomial dari matriks persegi melalui cara yang persis sama dengan polinomial skalar.

Sebagai contoh, jika  $f(x) = x^2 + 5x + 4$  dan  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ , kita mendefinisikan  $f(A)$  sebagai

$$f(A) = A^2 + 5A + 4.$$

Karena

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}, \\ f(A) &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Menarik untuk memperhatikan bahwa  $f(A)$  dapat dihitung dengan menggunakan suku yang difaktorkan dari  $f(x)$ . Sebagai contoh

$$f(x) = x^2 + 5x + 4 = (x + 1)(x + 4),$$

sehingga

$$\begin{aligned} f(A) &= (A + I)(A + 4I) \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

---

**Contoh 1.7.1.** Carilah  $f(A)$  jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$


---

**Solusi 1.7.1.**

$$f(A) = \frac{A}{A^2 - 1} = A(A^2 - 1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa  $f(A)$  juga bisa dihitung dengan pecahan parsial. Karena

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1},$$

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2}(A - I)^{-1} + \frac{1}{2}(A + I)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 1.7.2 Evaluasi Fungsi Matriks dengan Pendiagonalan

Ketika terdapat matriks persegi  $A$  mirip dengan matriks diagonal, penghitungan  $f(A)$  dapat lebih disederhanakan.

Jika  $A$  terdiagonalkan maka

$$S^{-1}AS = D,$$

dengan  $D$  adalah matriks diagonal. Maka:

$$\begin{aligned} D^2 &= S^{-1}ASS^{-1}AS = S^{-1}A^2S, \\ D^k &= S^{-1}A^{k-1}SS^{-1}AS = S^{-1}A^kS. \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} A^k &= SD^kS^{-1} \\ A^n + A^m &= SD^nS^{-1} + SD^mS^{-1} = S(D^n + D^m)S^{-1}. \end{aligned}$$

Jika  $f(A)$  merupakan sebuah polinomial, maka:

$$f(A) = Sf(D)S^{-1}.$$

Selanjutnya karena  $D$  adalah matriks diagonal, maka elemennya adalah nilai eigen dari  $A$

$$\begin{aligned} D^k &= \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \\ f(D) &= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$f(A) = S \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S^{-1}.$$

**Contoh 1.7.2.** Carilah  $f(A)$  jika

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - x - 3.$$

**Solusi 1.7.2.** Pertama, kita cari nilai eigen dari  $A$ ,

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & -2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$$

Vektor eigen untuk  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = 2$  berturut-turut adalah

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

dan

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maka

$$f(A) = Sf(D)S^{-1} = S \begin{pmatrix} f(1) & 0 \\ 0 & f(2) \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Karena

$$f(1) = -1, \quad f(2) = 3,$$

$$f(A) = Sf(D)S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Contoh 1.7.3.** Carilah matriks  $A$  sehingga

$$A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Solusi 1.7.3.** Pertama, marilah kita diagonalkan ruas kanan

$$\begin{pmatrix} 4 - \lambda_1 & 3 \\ 5 & 6 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0.$$

Vektor eigen untuk  $\lambda_1 = 1$  dan  $\lambda_2 = 9$  berturut-turut adalah

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dan

$$D = S^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$S^{-1}(A^2 - 4A + 4I)S = S^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ruas kiri persamaan juga harus diagonal, karena ruas kanan berupa matriks diagonal. Karena kita telah menunjukkan sepanjang  $S^{-1}AS$  diagonal, maka  $S^{-1}A^kS$  akan diagonal. Kita dapat mengasumsikan

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Dari sini kita bisa memperoleh

$$S^{-1}(A^2 - 4A + 4I)S = \begin{pmatrix} x_1^2 - 4x_1 + 4 & 0 \\ 0 & x_2^2 - 4x_2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

yang memberikan

$$x_1^2 - 4x_1 + 4 = 1$$

$$x_2^2 - 4x_2 + 4 = 9.$$

Dari persamaan pertama kita mempunyai  $x_1 = 1, 3$ , dan dari persamaan kedua kita memperoleh  $x_2 = 5, -1$ . Sehingga terdapat empat buah kombinasi untuk  $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$  yaitu

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga persamaan asalnya memiliki empat buah solusi

$$A_1 = SA_1S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

dan dengan cara yang sama

$$A_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk tiap fungsi skalar yang dapat dinyatakan dalam deret tak hingga, sebuah fungsi matriks yang berhubungan dapat didefinisikan. Sebagai contoh, dengan

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots,$$

dan

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots.$$

Jika  $A$  terdiagonalkan, maka

$$S^{-1}AS = D, \quad A^n = SD^nS^{-1},$$

$$e^A = S \left( I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \dots \right) S^{-1},$$

dengan

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sehingga kita bisa memperoleh

$$e^A = S \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2 + \dots \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

**Contoh 1.7.4.** Hitunglah  $e^A$ , jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solusi 1.7.4.** Karena  $A$  simetrik maka terdiagonalkan.

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 5 \\ 5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0,$$

yang memberikan  $\lambda = 6, -4$ . Vektor eigennya adalah

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



Maka

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} e^A &= S \begin{pmatrix} e^6 & 0 \\ 0 & e^{-4} \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^6 & 0 \\ 0 & e^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (e^6 + e^{-4}) & (e^6 - e^{-4}) \\ (e^6 - e^{-4}) & (e^6 + e^{-4}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 1.7.3 Teorema Cayley-Hamilton

Teorem Cayley-Hamilton yang terkenal menyatakan bahwa setiap matriks persegi memenuhi persamaan karakteristiknya sendiri.

Hal ini berarti, jika  $P(\lambda)$  adalah polinomial karakteristik dari matriks  $A$  orde ke- $n$ , maka

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_0,$$

sehingga

$$P(A) = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_0 I = 0.$$

Untuk membuktikan teorema ini, misalkan  $\mathbf{x}_i$  adalah vektor eigen untuk  $\lambda_i$ . Sehingga

$$P(\lambda_i) = 0, \quad A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i.$$

Sekarang

$$\begin{aligned} P(A)\mathbf{x}_i &= (c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_0 I) \mathbf{x}_i \\ &= (c_n \lambda_i^n + c_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \cdots + c_0) \mathbf{x}_i \\ &= P(\lambda_i) \mathbf{x}_i = 0 \mathbf{x}_i. \end{aligned}$$

Karena ini berlaku untuk semua vektor eigen dari  $A$ ,  $P(A)$  haruslah matriks nol.

Sebagai contoh, jika

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3-2 & 4-4 \\ 4-4 & 5-3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Invers dengan Teorema Cayley-Hamilton

Teorema Cayley-Hamilton dapat digunakan untuk mencari invers dari matriks persegi. Kita mulai dari persamaan karakteristik dari  $A$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0,$$

kita memiliki

$$P(A) = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0.$$

Mengalikan persamaan dari kiri dengan  $A^{-1}$ , kita peroleh

$$A^{-1}P(A) = c_n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \cdots + c_1 I + c_0 A^{-1} = 0.$$

Sehingga

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0} (c_n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \cdots + c_1 I).$$

**Contoh 1.7.3.1.** Carilah  $A^{-1}$  dengan teorema Cayley-Hamilton jika

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

**Solusi 1.7.3.1.**

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4 - \lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3 - \lambda \end{pmatrix} = 6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3,$$

kemudian

$$\begin{aligned} P(A) &= 6I - 11A + 6A^2 - A^3, \\ A^{-1}P(A) &= 6A^{-1} - 11I + 6A - A^2 = 0, \\ A^{-1} &= \frac{1}{6} (A^2 - 6A + 11I), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{6} \left[ \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[ \begin{pmatrix} 15 & 23 & -17 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & 22 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 42 & -30 \\ 0 & 24 & -6 \\ 12 & 48 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & -19 & 13 \\ -2 & -5 & 5 \\ -8 & -26 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dapat dengan mudah diverifikasi bahwa

$$A^{-1}A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & -19 & 13 \\ -2 & -5 & 5 \\ -8 & -26 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Matriks dengan Pangkat yang Tinggi

Salah satu aplikasi penting dari teorema Cayley-Hamilton adalah dalam representasi matriks dengan pangkat yang derajatnya tinggi. Dari persamaan  $P(A) = 0$ , kita mempunyai

$$A^n = -\frac{1}{c_n} (c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \dots + c_1A + c_0I). \quad (1.39)$$

Kalikan dengan  $A$

$$A^{n+1} = -\frac{1}{c_n} (c_{n-1}A^n + c_{n-2}A^{n-1} + \dots + c_1A^2 + c_0A), \quad (1.40)$$

dan menggantikan  $A^n$  dari (1.39) ke (1.40), kita mempunyai

$$A^{n+1} = \left( \frac{c_{n-1}^2}{c_n^2} - \frac{c_{n-2}}{c_n} \right) A^{n-1} + \dots + \left( \frac{c_{n-1}c_1}{c_n^2} - \frac{c_0}{c_n} \right) A + \frac{c_{n-1}c_0}{c_n^2} I. \quad (1.41)$$

Jelas bahwa proses ini dapat dilanjutkan. Sehingga sebarang pangkat bilangan bulat dari sebuah matriks berorde  $n$  dapat direduksi menjadi polinomial dari matriks, dengan derajat pangkat paling tinggi adalah  $n - 1$ . Sehingga kita bisa mendapatkan pangkat yang tinggi dari  $A$ .

**Contoh 1.7.3.2.** Carilah  $A^{100}$ , jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solusi 1.7.3.2.** Karena

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0,$$

nilai eigen dari  $A$  adalah  $\lambda_1 = 4$  dan  $\lambda_2 = -2$ . Nilai eigen dari  $A^{100}$  haruslah  $\lambda_1^{100}$  dan  $\lambda_2^{100}$ , yaitu

$$A^{100}\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{100}\mathbf{x}_1, \quad A^{100}\mathbf{x}_2 = \lambda_2^{100}\mathbf{x}_2.$$

Di lain pihak, dari teorema Cayley-Hamilton, kita tahu bahwa  $A^{100}$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari  $A$  dan  $I$  karena  $A$  adalah matriks dengan orde 2 ( $n = 2$ ).

$$A^{100} = \alpha A + \beta I,$$

dan

$$A^{100}\mathbf{x}_1 = (\alpha A + \beta I)\mathbf{x}_1 = (\alpha\lambda_1 + \beta)\mathbf{x}_1,$$

$$A^{100}\mathbf{x}_2 = (\alpha A + \beta I)\mathbf{x}_2 = (\alpha\lambda_2 + \beta)\mathbf{x}_2.$$

Sehingga

$$\lambda_1^{100} = \alpha\lambda_1 + \beta, \quad \lambda_2^{100} = \alpha\lambda_2 + \beta.$$

Dari sini

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1^{100} - \lambda_2^{100}) = \frac{1}{6} (4^{100} - 2^{100})$$

$$\beta = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1\lambda_2^{100} - \lambda_2\lambda_1^{100}) = \frac{1}{3} (4^{100} + 2^{101}).$$

Maka

$$A^{100} = \frac{1}{6} (4^{100} - 2^{100}) A + \frac{1}{3} (4^{100} + 2^{101}) I.$$

## Latihan

1. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$\begin{pmatrix} 19 & 10 \\ -30 & -16 \end{pmatrix}.$$

Jawab:  $\lambda_1 = 4$ ,  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

2. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$\begin{pmatrix} 6 - 2i & -1 + 3i \\ 9 + 3i & -4 + 3i \end{pmatrix}.$$

Jawab:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_2 = i$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2 \end{pmatrix}$ .

3. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Jawab:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_3 = 2$ ,  $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

4. Jika  $U^\dagger U = I$ , tunjukkan bahwa (a). kolom dari  $U$  membentuk himpunan ortonormal; (b)  $UU^\dagger = I$  baris dari  $U$  membentuk himpunan ortonormal.
5. Tunjukkan bahwa nilai eigen matriks anti hermitian adalah nol dan imajiner.
6. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & 6i \\ -6i & -2 \end{pmatrix},$$

dan tunjukkan bahwa vektor eigennya saling ortogonal.

Jawab:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ .

7. Bentuklah sebuah matriks uniter  $U$  dengan dua buah vektor eigen ternormalisasi dari soal sebelumnya dan tunjukkan bahwa

$$U^\dagger U = I$$

Jawab:  $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ .

8. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks simetrik berikut

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}.$$

Buatlah matriks ortogonal  $U$  dengan dua buah vektor eigen ternormalisasi dan tunjukkan bahwa

$$\tilde{U}AU = \Lambda,$$

dengan  $\Lambda$  sebuah matriks diagonal yang elemennya adalah nilai eigen dari  $A$ .

Jawab:  $U = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

9. Diagonalkan matriks hermitian berikut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

dengan transformasi similaritas uniter

$$U^\dagger AU = \Lambda.$$

Carilah matriks uniter  $U$  dan matriks diagonal  $\Lambda$ .

Jawab:  $U = \begin{pmatrix} -\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

10. Diagonalkan matriks simetrik berikut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dengan transformasi similaritas

$$U^\dagger AU = \Lambda.$$

Carilah matriks uniter  $U$  dan matriks diagonal  $\Lambda$ .

$$\text{Jawab: } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Diagonalkan matriks simetrik berikut

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & -8 \\ 10 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

dengan transformasi similaritas

$$\tilde{U}AU = \Lambda.$$

Carilah matriks uniter  $U$  dan matriks diagonal  $\Lambda$ .

$$\text{Jawab: } U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

12. Jika  $A$  adalah matriks simetrik ( $\tilde{A} = A$ ),  $S$  adalah sebuah matriks ortogonal dan  $A' = S^{-1}AS$ , tunjukkan bahwa  $A'$  juga matriks simetrik.

13. Jika  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah matriks kolom dalam ruang dua dimensi yang dihubungkan dengan persamaan

$$\mathbf{v} = C\mathbf{u},$$

dengan

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

carilah  $C^{-1}$  dengan metode berikut

(a) Aturan Cramer.

(b) Tunjukkan  $C$  ortogonal, sehingga  $C^{-1} = \tilde{C}$ .

(c) Persamaan  $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$  berarti merotasikan  $\mathbf{u}$  menjadi  $\mathbf{v}$ . Karena  $\mathbf{u} = C^{-1}\mathbf{v}$ ,  $C^{-1}$  harus merotasikan kembali  $\mathbf{v}$  menjadi  $\mathbf{u}$ . Sehingga  $C^{-1}$  haruslah merupakan matriks rotasi dengan arah berlawanan dengan  $C$ .

14. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks rotasi dua dimensi

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Carilah matriks uniter  $U$  sehingga

$$U^\dagger C U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Jawab:  $\lambda_1 = e^{i\theta}$ ,  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ,  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

15. Tunjukkan bahwa dalam bentuk kanonik, ekspresi kuadratik

$$Q(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 48x_1x_2 - 7x_2^2$$

adalah

$$Q'(x'_1, x'_2) = 25x_1'^2 - 25x_2'^2,$$

dengan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Carilah matriks ortogonal  $S$ .

Jawab:

$$S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Jika  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , dan  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ , carilah  $f(A)$ .

Jawab  $\begin{pmatrix} -13 & -26 \\ 13 & 26 \end{pmatrix}$ .

17. Jika  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ , carilah  $A^n$  dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ .

Jawab:  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{8}{3} - \frac{8}{3}(\frac{1}{4})^n & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}$ .

18. Carilah  $X$ , jika  $X^3 = \begin{pmatrix} -6 & 14 \\ -7 & 15 \end{pmatrix}$ .

Jawab:  $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

19. Selesaikan persamaan

$$M^2 - 5M + 3I = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Jawab:  $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $M_3 = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $M_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

20. Menurut teorema Cayley-Hamilton, tiap matriks persegi memenuhi persamaan karakteristiknya sendiri. Buktikan untuk matriks berikut

(a)  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ , (b)  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

21. Carilah  $A^{-1}$  dengan teorema Cayley-Hamilton jika

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jawab:  $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---



# Transformasi Vektor dan Tensor Cartesian

Hukum-hukum fisika secara universal paling baik jika dideskripsikan dengan kuantitas matematik yang bebas kerangka acuan. Tetapi persoalan fisika yang dinyatakan dalam hukum-hukum ini hanya bisa diselesaikan dengan, dalam kebanyakan kasus, hanya jika kuantitas relevannya diuraikan/dipisahkan dalam suatu sistem koordinat. Sebagai contoh, jika kita perhatikan sebuah balok yang bergerak dalam bidang miring, gerakan balok tersebut jelas dapat dinyatakan dalam hukum dinamika Newton II  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , tanpa koordinat yang muncul. Tetapi untuk mendapatkan nilai yang benar dari kecepatan, percepatan dan lain sebagainya dari balok, kita harus memilih suatu sistem koordinat. Kita akan mendapatkan jawaban yang benar tidak peduli bagaimana orientasi sumbu yang kita pilih, meskipun ada beberapa pilihan yang lebih sesuai. Kita bisa saja memilih sumbu- $x$  sepanjang bidang datar atau bidang miring. Jelaslah komponen  $x$  dan  $y$  dari  $\mathbf{F}$  dan  $\mathbf{a}$  dalam dua koordinat ini berbeda nilainya, tetapi kombinasi keduanya memberikan hasil yang sama. Dengan kata lain, jika sistem koordinat kita rotasikan, komponen sebuah vektor tentu akan berubah. Tetapi perubahannya sedemikian rupa sehingga persamaan vektornya tetap valid. Untuk alasan ini, medan vektor paling baik didefinisikan dalam suku perilaku komponen di bawah rotasi sumbu.

Ketika sistem koordinat dirotasikan, transformasi komponen vektor posisi  $\mathbf{r}$  dapat dinyatakan dalam suku matriks rotasi. Kita akan menggunakan matriks rotasi untuk mendefinisikan semua vektor yang lain. Sifat-sifat matriks rotasi ini akan digunakan untuk analisis beberapa cara untuk mengkombinasikan komponen dua buah vektor atau lebih. Pendekatan pada analisis vektor ini dapat dengan mudah digeneralisasi untuk vektor berdimensi lebih dari tiga. Hal ini juga secara alami membawa kita pada analisis tensor.

Beberapa kuantitas fisika tidak berupa skalar maupun vektor. Sebagai contoh, rapat arus listrik  $\mathbf{J}$  yang bergerak pada sebuah material dihubungkan secara linier dengan medan listrik  $\mathbf{E}$  yang menyebabkannya. Jika materialnya isotropik, tiga buah komponen  $\mathbf{J}$  dan  $\mathbf{E}$

---

dihubungkan dengan konstanta yang sama dalam hukum Ohm

$$J_i = \sigma E_i,$$

dengan  $\sigma$  dikenal sebagai konduktivitas. Tetapi, jika materialnya anisotropik (nonisotropik), arah arus berbeda dengan arah medan. Dalam kasus ini hukum Ohm berbentuk

$$J_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} E_j,$$

dengan  $\sigma_{ij}$  tensor konduktivitas. Ini merupakan tensor rank dua karena memiliki dua buah subscript  $i$  dan  $j$ , yang masing-masing bergerak dari 1 ke 3. Sehingga semuanya terdiri dari 9 komponen. Sifat-sifat untuk mendefinisikan sebuah tensor adalah, ketika kita merotasikan sumbu koordinat, komponen-komponennya harus berubah menurut aturan transformasi tertentu, analog dengan transformasi vektor. Sebenarnya, sebuah vektor dengan satu subscript pada komponennya, merupakan tensor rank satu. Sebuah tensor dengan rank  $n$  memiliki  $n$  subscript. Dalam bab ini, kita akan mempelajari tensor dalam koordinat Cartesian, sehingga dinamakan tensor Cartesian.<sup>1</sup>

## 2.1 Sifat-sifat Transformasi Vektor

### 2.1.1 Transformasi Vektor Posisi

Kerangka koordinat yang kita gunakan untuk mendeskripsikan posisi dalam ruang jelaslah sebarang, tetapi terdapat aturan transformasi spesifik untuk merubah vektor dari satu kerangka ke kerangka lain. Anggap sistem koordinat persegi kita rotasikan berlawanan arah jarum jam pada sumbu- $z$  sebesar sudut  $\theta$ . Titik P berada pada posisi  $(x, y, z)$  sebelum rotasi. Setelah rotasi letaknya tidak berubah hanya koordinatnya menjadi  $(x', y', z')$ , seperti pada Gambar 2.1. Sehingga posisi vektor dalam sistem koordinat asalnya adalah

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (2.1)$$

dan dalam sistem koordinat yang dirotasikan

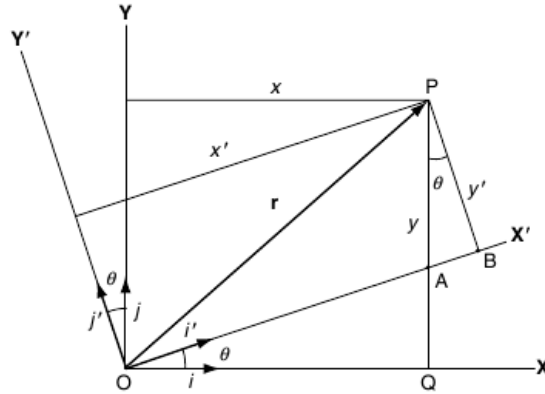
$$\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}', \quad (2.2)$$

dengan  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  dan  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$  berturut-turut adalah vektor satuan dalam koordinat asal dan dirotasikan. Hubungan antara sistem aksen dan tak aksen dapat dengan mudah diperoleh karena

$$\begin{aligned} x' &= \mathbf{i}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{i}' \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})x + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})y + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})z \\ &= x \cos \theta + y \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Tensor yang lebih umum bisa dipelajari dala Relativitas Khusus dan Umum.



Gambar 2.1: Sistem koordinat yang dirotasikan pada sumbu- $z$ . Kuantitas aksen adalah dalam sistem dirotasikan dan kuantitas tak aksen (biasa) dalam sistem koordinat asal.

dan

$$\begin{aligned} y' &= \mathbf{j}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{j}' \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i})x + (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j})y + (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k})z \\ &= x \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + y \cos \theta = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Karena  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  maka

$$z' = z.$$

Jelas bahwa hubungan ini merupakan pernyataan geometrik dari rotasi. Terlihat dalam Gambar 2.1

$$\begin{aligned} x' &= OA + AB = \frac{OQ}{\cos \theta} + PA \sin \theta = \frac{OQ}{\cos \theta} + (PQ - AQ) \sin \theta \\ &= \frac{x}{\cos \theta} + (y - x \tan \theta) \sin \theta = x \left( \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) + y \sin \theta \\ &= x \cos \theta + y \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= PA \cos \theta = (PQ - AQ) \cos \theta = (y - x \tan \theta) \cos \theta \\ &= y \cos \theta - x \sin \theta, \end{aligned}$$

yang identik dengan (2.3) dan (2.4).

Dengan matriks, hubungan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Matriks  $3 \times 3$  ini dikenal sebagai matriks rotasi.

### 2.1.2 Persamaan Vektor

Kuantitas vektor digunakan untuk menyatakan hukum-hukum fisika yang bebas kerangka koordinat. Sebagai contoh, hukum Newton II tentang dinamika

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (2.6)$$

menghubungkan gaya  $\mathbf{F}$  dengan massa partikel  $m$  dan juga percepatannya  $\mathbf{a}$ . Tidak ada koordinat yang muncul secara eksplisit dalam persamaan, seperti yang seharusnya karena hukum ini berlaku universal. Tetapi biasanya kita lebih mudah mencari dengan memilih satu sistem koordinat dan bekerja dengan masing-masing komponen. Dalam sistem koordinat tertentu, tiap vektor dinyatakan dalam tiga buah komponen. Ketika kita merubah kerangka acuan, komponen-komponennya akan berubah. Tetapi perubahannya haruslah tertentu sehingga (2.6) terpenuhi. Koordinat akan berubah karena adanya translasi dan/atau rotasi sumbu. Sebuah translasi merubah titik asal sistem koordinat dan menghasilkan konstanta tambahan dalam komponen  $\mathbf{r}$ . Karena turunan konstanta adalah nol, translasi tidak akan merubah vektor  $\mathbf{F}$  dan  $\mathbf{a}$ . Sehingga perubahan penting disebabkan oleh rotasi sumbu.

Pertama jika kita perhatikan (2.6) berlaku untuk satu sistem koordinat maka ini juga berlaku untuk semua koordinat yang lain. Persamaannya dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

dan dibawah rotasi sumbu, vektor nol akan tetap nol dalam sistem koordinat yang baru. Dalam suku komponen-komponennya pada sistem koordinat Cartesian (2.7) dapat dituliskan sebagai

$$(F_x - ma_x)\mathbf{i} + (F_y - ma_y)\mathbf{j} + (F_z - ma_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

sehingga

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z. \quad (2.9)$$

Sekarang jika sistem dirotasikan berlawanan arah jarum jam pada sumbu  $-z$  sebesar sudut  $\theta$  seperti Gambar 2.1, (2.7) menjadi

$$(F'_{x'} - ma'_{x'})\mathbf{i}' + (F'_{y'} - ma'_{y'})\mathbf{j}' + (F'_{z'} - ma'_{z'})\mathbf{k}' = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

dengan definisi

$$\begin{aligned} a'_{x'} &= \frac{d^2}{dt^2}x' = \frac{d^2}{dt^2}(x \cos \theta + y \sin \theta) \\ &= a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} a'_{y'} &= \frac{d^2}{dt^2}y' = \frac{d^2}{dt^2}(-x \sin \theta + y \cos \theta) \\ &= -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$a'_{z'} = \frac{d^2}{dt^2} z' = \frac{d^2}{dt^2} z = a_z. \quad (2.13)$$

Masing-masing komponen (2.10) harus identik sama dengan nol. Hal ini memberikan

$$\begin{aligned} F'_{x'} &= ma'_{x'} = m(a_x \cos \theta + a_y \sin \theta), \\ F'_{y'} &= ma'_{y'} = m(-a_x \sin \theta + a_y \cos \theta), \\ F'_{z'} &= ma'_{z'} = ma_z. \end{aligned}$$

Dengan (2.9), kita memiliki

$$\begin{aligned} F'_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \\ F'_{y'} &= -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta, \\ F'_{z'} &= F_z \end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks, hubungan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} F'_{x'} \\ F'_{y'} \\ F'_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Dengan membandingkan (2.5) dan (2.14), kita melihat bahwa matriks rotasi benar-benar sama. Dengan kata lain komponen vektor  $\mathbf{F}$  bertransformasi dengan cara yang serupa dengan komponen vektor posisi  $\mathbf{r}$ .

Dalam aplikasi fisis, hal ini berarti agar sebuah kuantitas dapat dipandang sebagai sebuah vektor, nilai yang terukur dari komponen-komponennya dalam sistem terotasi haruslah dihubungkan dengan cara ini pada sistem koordinat asalnya.

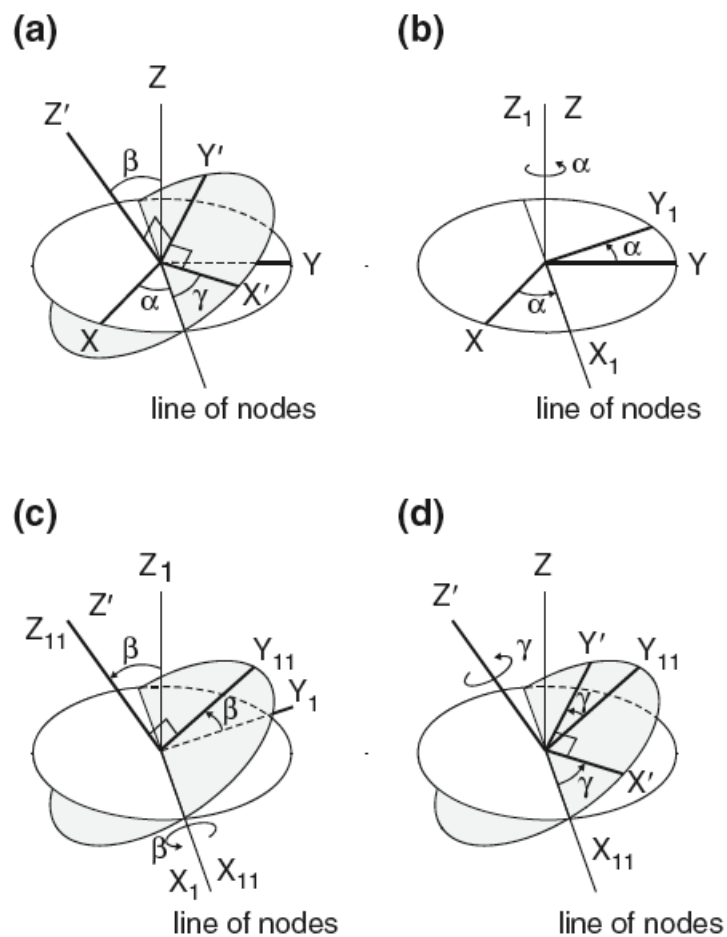
Orientasi antara dua buah sistem koordinat tidak hanya dibatasi pada sebuah rotasi pada sumbu tertentu. Jika kita mengetahui orientasi relatif sistem, kita dapat mengikuti prosedur (2.3) untuk memperoleh hubungan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}) & (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}) \\ (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}) & (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}) \\ (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j}) & (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dalam Subbab 2.1.3 kita akan mempelajari rotasi sebenarnya yang merubah  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  menjadi  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ .

### 2.1.3 Sudut Euler

Kita kadang perlu menyatakan matriks transformasi dalam suku rotasi konkrit yang merubah sumbu koordinat dalam orientasi tertentu. Secara umum rotasi dapat dianggap sebagai kombinasi tiga rotasi yang dilakukan berurutan dalam tiga arah berbeda. Deskripsi paling bermanfaat untuk hal ini adalah dalam suku sudut Euler  $\alpha, \beta, \gamma$  yang sekarang kita definisikan.



Gambar 2.2: Sudut Euler. (a) Orientasi relatif dua buah sistem koordinat persegi  $XYZ$  dan  $X'Y'Z'$  dengan titik asal biasa yang dinyatakan dalam tiga buah sudut Euler  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Transformasi matriksnya merupakan hasil perkalian tiga buah matriks untuk tiga buah rotasi berikut. (b) Merotasikan  $\alpha$  sepanjang sumbu  $Z$ , bawa sumbu  $X$  agar berhimpit dengan garis simpul (line of nodes). (c) Rotasikan  $\beta$  pada garis simpul. (d) Terakhir rotasikan  $\gamma$  sepanjang sumbu  $Z'$ .

Dua buah sistem koordinat ditunjukkan pada Gambar 2.2(a). Misalkan  $XYZ$  adalah koordinat sistem mula-mula,  $X'Y'Z'$  merupakan sistem koordinat akhir. Perpotongan bidang  $XY$  dan  $X'Y'$  dikenal sebagai garis simpul (line of nodes). Orientasi relatif dua buah sistem dispesifikasi tiga buah sudut  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Seperti yang terlihat pada Gambar 2.2(a),  $\alpha$  adalah sudut antara sumbu  $X$  dengan garis simpul,  $\beta$  adalah sudut antara sumbu  $Z$  dengan  $Z'$ , dan  $\gamma$  adalah sudut antara garis simpul dengan sumbu  $X'$ .

Matriks transformasi dari  $XYZ$  menjadi  $X'Y'Z'$  dapat diperoleh dengan menuliskannya sebagai perkalian tiga buah rotasi terpisah yang masing-masing memiliki matriks rotasi yang relatif sederhana. Pertama kita rotasikan sumbu mula-mula  $XYZ$  sebesar sudut  $\alpha$  berlawanan arah jarum jam pada sumbu  $Z$ . Sistem koordinat resultannya kita berikan label  $X_1, Y_1, Z_1$  seperti pada Gambar 2.2(b). Pada langkah kedua sumbu menengahnya (intermediate) dirotasikan pada sumbu  $X_1$  berlawanan arah dengan jarum jam sebesar sudut  $\beta$  untuk memperoleh sumbu menengah  $X_{11}, Y_{11}, Z_{11}$  seperti pada Gambar 2.2(c). Terakhir  $X_{11}, Y_{11}, Z_{11}$  dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar sudut  $\gamma$  pada sumbu  $Z_{11}$  untuk memperoleh sumbu  $X'Y'Z'$  seperti pada Gambar 2.2(d).

Setelah rotasi pertama, koordinat  $\mathbf{r}$  dalam sistem mula-mula  $(x, y, z)$  menjadi  $(x_1, y_1, z_1)$  dalam sistem  $X_1, Y_1, Z_1$ . Keduanya dihubungkan matriks rotasi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Rotasi kedua pada sumbu  $X_1$ . Setelah rotasi  $(x_1, y_1, z_1)$  menjadi  $(x_{11}, y_{11}, z_{11})$  dengan hubungan

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Setelah rotasi terakhir pada sumbu  $Z_{11}$  koordinat  $\mathbf{r}$  menjadi  $(x', y', z')$  yang diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Jelas dari (2.15)-(2.17) bahwa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

dengan

$$(A) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Maka matriks  $(A)$   $3 \times 3$  merupakan matriks transformasi yang lengkap. hasil perkalian tiga buah matriks memberikan elemen  $(A)$  yaitu

$$(A) = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha & -\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha & \cos \gamma \sin \beta \\ \sin \beta \sin \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Tidak terlalu sulit untuk membuktikan bahwa hasil kali matriks  $(A)$  dengan transposenya  $(A)^T$  adalah matriks identitas  $I$

$$(A)(A^T) = (I).$$

Maka matriks inversnya  $A^{-1}$  diberikan oleh matriks transposenya  $(A)^T$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A^T) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Hal ini adalah sifat umum dari matriks rotasi yang akan kita buktikan pada Subbab 2.1.4.

Perlu diperhatikan di sini penulis lain mendefinisikan sudut Euler sedikit berbeda, karena urutan rotasi yang digunakan dalam mendefinisikan orientasi akhir sistem koordinat boleh sebarang. Di sini kita mengadopsi definisi yang digunakan secara luas dalam buku mekanika klasik.

#### 2.1.4 Sifat-sifat Matriks Rotasi

Untuk mempelajari sifat-sifat ruang vektor, akan lebih nyaman jika kita menggunakan notasi yang lebih sistematis. Misalkan  $(x, y, z)$  adalah  $(x_1, x_2, x_3)$ ;  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  adalah  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  dan  $(V_x, V_y, V_z)$  adalah  $(V_1, V_2, V_3)$ . Kuantitas dalam sistem terotasi diberikan label sebagai kuantitas aksen. Salah satu keuntungan notasi baru adalah mengijinkan kita untuk menggunakan simbol jumlah  $\sum$  untuk menuliskan persamaan dalam bentuk yang lebih kompak. Ortogonalitas  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  dinyatakan sebagai

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij},$$

dengan simbol  $\delta_{ij}$  dikenal sebagai delta Kronecker didefinisikan sebagai

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Secara umum, vektor posisi  $\mathbf{r}$  yang sama dinyatakan dalam dua buah sistem koordinat berbeda dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j. \quad (2.21)$$



Dengan mengambil perkalian dot  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}$  kita mempunyai

$$\mathbf{e}'_i \cdot \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) x'_j = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} x'_j = x'_i. \quad (2.22)$$

Perkalian dot yang sama dari (2.21) memberikan

$$\mathbf{e}'_i \cdot \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) x_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j. \quad (2.23)$$

Dari (2.22) dan (2.23) diperoleh

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) x_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad (2.24)$$

dengan

$$a_{ij} = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) \quad (2.25)$$

adalah arah cosinus antara  $\mathbf{e}'_i$  dan  $\mathbf{e}_j$ . Perhatikan bahwa  $i$  dalam (2.24) tetap sebagai sebuah parameter yang memberikan tiga buah persamaan berbeda ketika kita masukkan nilai 1, 2, dan 3. Dalam notasi matriks, (2.24) dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Jika kita mengambil  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}$ , bukan  $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{r}$ , dan mengikuti prosedur yang sama kita memperoleh

$$x_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j) x'_j,$$

karena  $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j)$  adalah cosinus sudut antara  $\mathbf{e}_i$  dengan  $\mathbf{e}'_j$  yang dapat dinyatakan juga dengan  $(\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i)$  dan dengan definisi (2.25)  $(\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i) = a_{ij}$ , maka

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} x'_j, \quad (2.27)$$

atau

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Jika kita bandingkan (2.26) dengan (2.28) kita melihat bahwa inverse matriks rotasi sama dengan transposenya

$$(a_{ij})^{-1} = (a_{ji}) = (a_{ij})^T. \quad (2.29)$$

Transformasi sebarang yang memenuhi kondisi ini dikenal sebagai transformasi ortogonal.

Jika kita memberikan nama ulang pada indeks  $i$  dan  $j$ , kita dapat menuliskan (2.27) sebagai

$$x_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x'_i. \quad (2.30)$$

Jelas dari (2.24) dan persamaan terakhir bahwa

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}. \quad (2.31)$$

Kita tekankan di sini bahwa hubungan ini hanya berlaku untuk sistem koordinat Cartesian.

Sembilan buah elemen matriks rotasi tidak saling bebas satu dengan yang lainnya. Salah satu cara untuk menurunkan hubungan ini adalah dengan memperhatikan bahwa jika dua buah sistem koordinat memiliki titik asal yang sama maka panjang vektor posisi haruslah sama dalam dua sistem ini. Hal ini mengharuskan

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{j=1}^3 x_j^2. \quad (2.32)$$

Dengan menggunakan (2.24), kita mempunyai

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_i'^2 &= \sum_{i=1}^3 x'_i x'_i = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) \left( \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_j x_k \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \sum_{j=1}^3 x_j^2. \end{aligned}$$

Hal ini berlaku untuk semua titik, jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \quad (2.33)$$

Kondisi ini dikenal sebagai syarat ortogonalitas. Matriks sebarang yang elemennya memenuhi syarat ini dikenal sebagai matriks rotasi. Matriks rotasi adalah matriks ortogonal. Dengan semua nilai  $i$  dan  $j$  yang mungkin, (2.33) terdiri dari enam buah persamaan. Himpunan persamaan ini ekuivalen dengan

$$\sum_{i=1}^3 a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}. \quad (2.34)$$

yang juga bisa didapatkan dari (2.32), tetapi mulai dari kanan ke kiri dengan transformasi (2.27).

**Contoh 2.1.1.** Tunjukkan bahwa determinan matriks ortogonal adalah  $+1$  dan  $-1$ .

**Solusi 2.1.1.** Misalkan matriks transformasinya  $(A)$ . Karena  $(A)(A^{-1}) = (I)$ , determinan dari matriks identitas sama dengan 1,  $|AA^{-1}| = 1$ , untuk transformasi ortogonal  $A^{-1} = A^T$ , sehingga  $|AA^T| = 1$  karena  $|AA^T| = |A||A^T|$  dan  $|A| = |A^T|$ , maka  $|A|^2 = 1$ . Sehingga  $|A| = \pm 1$ .

**Contoh 2.1.2.** Tunjukkan bahwa determinan matriks rotasi adalah +1.

**Solusi 2.1.2.** Kita nyatakan  $\mathbf{e}'_i$  dalam  $\{\mathbf{e}_k\}$  :  $\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^3 b_{ik} \mathbf{e}_k$ .

$$(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^3 b_{ik} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^3 b_{ik} \delta_{kj} = b_{ij}.$$

Tetapi  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_{ij}$ , sehingga  $b_{ij} = a_{ij}$ . Maka

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}'_2 = a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + a_{23} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}'_3 = a_{31} \mathbf{e}_1 + a_{32} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3.$$

Seperti yang sudah dipelajari dalam analisis vektor, perkalian tiga buah skalar sama dengan determinan komponennya

$$\mathbf{e}'_1 \cdot (\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

yang merupakan matriks rotasi. Di lain pihak

$$\mathbf{e}'_1 \cdot (\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3) = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = +1.$$

sehingga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +1$$

### 2.1.5 Definisi Vektor dan Skalar dalam Sifat Transformasi

Sekarang kita sampai mendefinisikan ulang secara aljabar sebuah vektor dan tensor.

Di bawah rotasi sumbu, koordinat vektor posisi dalam sistem mula-mula  $x_i$  bertransformasi menjadi  $x'_i$  dalam sistem terotasi menurut

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (2.35)$$

dengan

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \quad (2.36)$$

Jika di bawah transformasi ini, kuantitas  $\varphi$  tidak berubah, maka  $\varphi$  dinamakan sebuah skalar. Hal ini berarti jika  $\varphi$  skalar maka

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3). \quad (2.37)$$

Perhatikan bahwa setelah koordinatnya ditransformasikan, bentuk fungsionalnya dapat berubah (yaitu  $\varphi'$ ), tetapi sepanjang  $(x_1, x_2, x_3)$  dan  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  sama, maka keduanya memiliki nilai yang juga sama.

Jika himpunan kuantitas  $(A_1, A_2, A_3)$  dalam sistem mula-mula ditransformasikan menjadi  $(A'_1, A'_2, A'_3)$  dalam sistem terotasi menurut

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j. \quad (2.38)$$

maka kuantitas  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  dinamakan vektor. Karena  $(a_{ij})^{-1} = a_{ji}$ , (2.38) ekuivalen dengan

$$A_i = \sum_j a_{ji} A'_j. \quad (2.39)$$

Definisi ini memungkinkan generalisasi dan menjamin bahwa kuantitas vektor bebas sistem koordinat.

**Contoh 2.1.3.** Anggap  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  adalah vektor. Tunjukkan bahwa perkalian dotnya  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  adalah skalar.

**Solusi 2.1.3.** Karena  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  adalah vektor, di bawah rotasi komponen-komponennya bertransformasi menurut

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j; \quad B'_i = \sum_j a_{ij} B_j.$$

Untuk menunjukkan perkalian dot

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i$$

adalah skalar, kita harus membuktikan nilainya pada sistem terotasi sama dengan nilainya pada sistem asalnya

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})' &= \sum_i A'_i B'_i = \sum_i \left( \sum_j a_{ij} A_j \right) \left( \sum_k a_{ik} A_k \right) \\ &= \sum_j \sum_k \left( \sum_i a_{ij} a_{ik} \right) A_j A_k = \sum_j \sum_k \delta_{jk} A_j A_k = \sum_j A_j A_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Sehingga  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  adalah skalar.

**Contoh 2.1.4.** Tunjukkan bahwa jika  $(A_1, A_2, A_3)$  sedemikian rupa sehingga  $\sum_i A_i B_i$  adalah skalar untuk tiap vektor  $\mathbf{B}$ , maka  $(A_1, A_2, A_3)$  adalah vektor.

**Solusi 2.1.4.** Karena  $\sum_i A_i B_i$  adalah skalar dan  $\mathbf{B}$  adalah vektor

$$\sum_i A_i B_i = \sum_i A'_i B'_i = \sum_i A'_i \sum_j a_{ij} B_j.$$

Sekarang  $i$  dan  $j$  adalah indeks berjalan, kita dapat menamai ulang  $i$  sebagai  $j$ , dan  $j$  sebagai  $i$ . Sehingga

$$\sum_i A_i B_i = \sum_j A'_j \sum_i a_{ji} B_i = \sum_i \sum_j a_{ji} A'_j B_i.$$

Mengikuti hal ini

$$\sum_i \left( A_i - \sum_j a_{ji} A'_j \right) B_i = 0.$$

Karena identitas ini berlaku untuk tiap  $\mathbf{B}$ , kita harus memiliki

$$A_i = \sum_j a_{ji} A'_j.$$

Sehingga  $A_1, A_2, A_3$  adalah komponen sebuah vektor.

**Contoh 2.1.5.** Tunjukkan dalam koordinat Cartesian, gradien fungsi skalar  $\nabla\varphi$  adalah fungsi vektor.

**Solusi 2.1.5.** Sebagai skalar maka ini haruslah memiliki nilai yang sama pada titik yang diberikan, bebas dari orientasi sistem koordinat

$$\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3). \quad (2.40)$$

Turunkan terhadap  $x'_i$  dan gunakan aturan rantai, kita memiliki

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{\partial}{\partial x'_i} \varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}. \quad (2.41)$$

Kita peroleh dari (2.31) dalam koordinat Cartesian

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = a_{ij},$$

sehingga

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}. \quad (2.42)$$

Sekarang komponen dari  $\nabla\varphi$  adalah

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right).$$

Komponen ini di bawah rotasi sumbu bertransformasi persis sama dengan komponen vektor, sehingga  $\nabla\varphi$  adalah fungsi vektor.

Sebuah vektor yang komponennya hanyalah berupa angka disebut vektor konstan. Semua vektor konstan berperilaku seperti vektor posisi. Ketika sumbunya dirotasikan, komponennya berubah menjadi himpunan angka sesuai dengan aturan transformasi. Sehingga himpunan tiga angka sebarang dapat dianggap sebagai vektor konstan.

Untuk medan vektor, komponennya berupa fungsi dari  $(x_1, x_2, x_3)$ . Di bawah rotasi, bukan hanya  $(x_1, x_2, x_3)$  berubah menjadi  $(x'_1, x'_2, x'_3)$ , kemunculan fungsi komponennya juga dapat berubah. Hal ini bisa menjadi suatu kerumitan.

Secara matematik aturan transformasi memberikan sedikit batasan dengan apa yang kita sebut sebagai sebuah vektor. Kita dapat membuat himpunan tiga buah fungsi sebarang komponen medan vektor hanya dengan mendefinisikan secara sederhana, dalam sistem terotasi, fungsi berkaitan yang diperoleh dari aturan transformasi yang benar sebagai komponen vektor dalam sistem tersebut.

Tetapi jika kita membicarakan entitas fisik, kita tidak sebebaskan itu dalam mendefinisikan komponennya dalam berbagai sistem. Komponen-komponen ini ditentukan oleh fakta fisik. Seperti yang sudah kita sebutkan di awal, semua hukum fisika yang benar haruslah bebas dari sistem koordinat. Dengan kata lain, kemunculan persamaan yang mendeskripsikan hukum fisika haruslah sama dalam semua sistem koordinat. Jika fungsi vektor mempertahankan kemunculannya dalam sistem terotasi, persamaan yang dituliskan dalam suku tersebut akan invarian di bawah rotasi. Sehingga kita memasukkan definisi medan vektor, sebuah syarat tambahan bahwa komponen yang ditransformasikan harus terlihat sama dengan komponen asalnya.

Sebagai contoh banyak penulis mendeskripsikan

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

sebagai medan vektor dalam ruang dua dimensi, tetapi yang lain sebaliknya. Jika kita menganggap (2.43) sebagai sebuah vektor, maka komponen vektor ini dalam sistem dengan sumbu yang dirotasikan sebesar sudut  $\theta$  diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, koordinatnya haruslah berubah menurut

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Dengan mudah kita menunjukkan

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x'_1 \sin \theta \cos \theta + x'_2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ x'_1 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2x'_2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Secara matematik kita dapat mendefinisikan (2.44) sebagai komponen vektor dalam sistem terotasi, tetapi bentuknya tidak sama dengan (2.43).

Di lain pihak, perhatikan ekspresi yang sedikit berbeda

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Dengan aturan transformasi yang sama, kita peroleh

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ -x'_1(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_2 \\ -x'_1 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

yang memiliki bentuk sama dengan (2.45). Dalam arti, kita mengatakan (2.45) invarian di bawah rotasi.

Di bawah definisi kita (2.45) adalah vektor sedangkan (2.43) bukan vektor.

## 2.2 Tensor Cartesian

### 2.2.1 Definisi

Definisi sebuah vektor dapat diperluas untuk mendefinisikan jenis yang lebih umum sebuah objek yang dinamakan tensor, yang bisa memiliki subscript lebih dari satu.

Jika dalam sistem koordinat persegi ruang tiga dimensi dibawah rotasi koordinat

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$$

kuantitas  $3^N T_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  (dengan tiap  $i_1, i_2, \dots, i_N$  merupakan indeks bebas berjalan dari 1 ke 3) bertransformasi menurut aturan

$$T'_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \cdots \sum_{j_N=1}^3 a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N}, \quad (2.47)$$

sehingga  $T_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  adalah komponen dari tensor Cartesian rank  $N$ . Karena bahasan kita terbatas hanya pada tensor Cartesian, kecuali nanti diberitahukan, maka kata Cartesian kita buang di sini.

Rank sebuah tensor adalah jumlah subscript bebas. Sehingga tensor dengan rank nol hanya memiliki satu buah komponen ( $3^0 = 1$ ). Sehingga kita bisa menganggapnya sebagai skalar. Tensor dengan rank satu memiliki tiga buah komponen ( $3^1 = 3$ ). Aturan transformasi komponen-komponennya di bawah rotasi sama dengan aturan pada vektor. Sehingga vektor adalah tensor rank satu.

Kasus lainnya paling penting adalah tensor rank dua. Tensor ini memiliki sembilan buah komponen ( $3^2 = 9$ ),  $T_{ij}$  mengikuti aturan transformasi

$$T'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{il} a_{jm} T_{lm}. \quad (2.48)$$

Komponen-komponen tensor rank dua dapat dinyatakan dalam matriks  $3 \times 3$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Tetapi, hal ini tidak berarti tiap matriks  $3 \times 3$  membentuk sebuah tensor. Syarat paling penting adalah komponen-komponennya memenuhi aturan transformasi.

Sebagai masalah terminologi, tensor rank dua dalam ruang tiga dimensi memiliki sembilan buah komponen  $T_{ij}$ . Tetapi sering  $T_{ij}$  dianggap sebagai “tensor” dibandingkan “komponen tensor” untuk sederhananya. Dengan kata lain,  $T_{ij}$  digunakan untuk menyatakan komponen keseluruhan sekaligus komponen individu. Konteks ini akan membuat artinya jelas.

**Contoh 2.2.1.** Tunjukkan bahwa dalam ruang dua dimensi, kuantitas berikut merupakan tensor rank dua

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & -x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

**Solusi 2.2.1.** Dalam ruang dua dimensi, tensor rank dua memiliki 4 ( $2^2 = 4$ ) komponen. Jika ini adalah tensor maka dalam koordinat terotasi bentuknya haruslah

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} x'_1x'_2 & -x'^2_1 \\ x'^2_2 & -x'_1x'_2 \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sekarang kita harus memeriksa jika tiap komponen memenuhi aturan transformasi

$$\begin{aligned} T'_{11} &= x'_1x'_2 = (\cos \theta x_1 + \sin \theta x_2) \\ &= -\cos \theta \sin \theta x_1^2 + \cos^2 \theta x_1x_2 - \sin^2 \theta x_2x_1 + \sin \theta \cos \theta x_2^2. \end{aligned}$$

Hal ini harus dibandingkan dengan

$$\begin{aligned} T'_{11} &= \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 a_{1l}a_{1m}T_{lm} \\ &= a_{11}a_{11}T_{11} + a_{11}a_{12}T_{12} + a_{12}a_{11}T_{21} + a_{12}a_{12}T_{22} \\ &= \cos^2 \theta x_1x_2 - \cos \theta \sin \theta x_1^2 + \sin \theta \cos \theta x_2^2 - \sin^2 \theta x_1x_2. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa dua buah ekspresi identik. Proses yang sama akan menunjukkan bahwa komponen-komponen lain juga memenuhi aturan transformasi. Sehingga  $T_{ij}$  adalah tensor rank dua dalam ruang dua dimensi.



Sifat-sifat transformasi ini tidak diambil begitu saja. Dalam contoh di atas, jika salah satu tanda aljabar kita rubah, aturan transformasinya tidak akan terpenuhi. Sebagai contoh jika  $T_{22}$  kita rubah menjadi  $x_1x_2$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

maka

$$T'_{11} \neq \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 a_{1l}a_{1m}T_{lm}$$

Sehingga (2.49) bukanlah sebuah tensor.

### 2.2.2 Tensor Delta Kronecker dan Tensor Levi Civita

#### Tensor Delta Kronecker

Delta Kronecker yang sudah kita temui

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

merupakan tensor rank dua. Untuk membuktikan ini, perhatikan transformasi berikut

$$\delta'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{il}a_{jm}\delta_{lm} = \sum_{l=1}^3 a_{il}a_{jl} = \delta_{ij}. \quad (2.50)$$

Maka

$$\delta'_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Sehingga  $\delta_{ij}$  memenuhi aturan transformasi tensor dan invarian di bawah rotasi. Sebagai tambahan, tensor ini memiliki sifat khusus. Nilai numerik komponennya sama dalam semua sistem koordinat. Tensor dengan sifat ini disebut sebagai tensor isotropik.

Karena

$$\sum_k D_{ik}\delta_{jk} = D_{ij},$$

tensor delta Kronecker disebut sebagai tensor substitusi. Tensor ini disebut juga sebagai tensor satuan, karena representasi matriksnya

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Tensor Levi-Civita

Simbol Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{jika } (i, j, k) \text{ adalah permutasi genap dari } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{jika } (i, j, k) \text{ adalah permutasi ganjil dari } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{jika ada indeks berulang} \end{cases}$$

yang kita gunakan untuk mendefinisikan determinan orde ketiga, merupakan tensor isotropik rank tiga. Tensor ini dikenal sebagai tensor bolak-balik (*alternating tensor*). Untuk membuktikan ini, ingat definisi dari determinan orde ketiga

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{1l} a_{2m} a_{3n} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.51)$$

Sekarang jika indeks baris (1,2,3) diganti dengan  $(i, j, k)$ , kita memiliki

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}. \quad (2.52)$$

Hubungan ini dapat didemonstrasikan dengan menuliskan suku tak hilang dalam dua ruas. Hal ini dapat juga dibuktikan dengan memperhatikan hal berikut. Pertama untuk  $i = 1, j = 2, k = 3$ , (2.52) akan tereduksi menjadi (2.51). Sekarang perhatikan efek jika kita merubah  $i$  menjadi  $j$  dan sebaliknya. Ruas kiri berubah tanda karena

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{jl} a_{im} a_{kn} \varepsilon_{lmn} &= \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{jm} a_{il} a_{kn} \varepsilon_{mln} \\ &= - \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn}. \end{aligned}$$

Ruas kanan juga berubah tandanya karena dua buah baris determinan saling bertukar. Jika dua buah indeks  $i, j, k$  ada yang sama, maka kedua ruas nilainya nol. Ruas kiri sama dengan nol karena kuantitas tersebut sama dengan negatifnya. Ruas kanan sama dengan nol karena dua baris determinan identik. Hal ini cukup untuk membuktikan hasil karena semua permutasi  $i, j, k$  dapat diperoleh dengan pertukaran yang berurutan.

Mengikuti sifat-sifat determinan dan definisi  $\varepsilon_{ijk}$  yaitu

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.53)$$

dan (2.52) menjadi

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.54)$$

Hubungan ini berlaku untuk sebarang determinan. Sekarang jika  $a_{ij}$  adalah elemen matriks rotasi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1,$$

seperti pada Contoh 2.1.2.

Untuk menentukan apakah  $\varepsilon_{ijk}$  merupakan tensor, kita harus melihat nilainya dalam sistem terotasi. Aturan transformasi mengharuskan

$$\varepsilon'_{ijk} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn}.$$

Tetapi

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}.$$

Sehingga

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}. \quad (2.55)$$

Maka  $\varepsilon_{ijk}$  adalah tensor isotropik rank tiga.

### Hubungan $\delta_{ijk}$ dengan $\varepsilon_{ijk}$

Terdapat sebuah hubungan yang penting dan menarik antara tensor delta Kronecker dan tensor Levi-Civita

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}. \quad (2.56)$$

Setelah kita jumlahkan terhadap indeks  $i$ , terdapat empat buah subscript bebas  $j, k, l, m$ . Sehingga (2.56) merepresentasikan 81 ( $3^4 = 81$ ) persamaan. Tidak sulit untuk membuktikan (2.56) dengan pengamatan berikut:

1. Jika  $j = k$  atau  $l = m$ , kedua buah ruas dalam (2.56) sama dengan nol. Jika  $j = k$ , ruas kiri sama dengan nol, karena  $\varepsilon_{ikk} = 0$ . Ruas kanan juga sama dengan nol karena  $\delta_{kl} \delta_{km} - \delta_{km} \delta_{kl} = 0$ . Hasil yang sama diperoleh untuk  $l = m$ . Sehingga kita hanya perlu mengecek kasus untuk  $j \neq k$  dan  $l \neq m$ .
2. Agar ruas kiri tidak hilang,  $i, j, k$  harus berbeda. Sehingga diberikan  $j \neq k$ ,  $i$  tetap. Perhatikan  $\varepsilon_{ilm}$ , karena  $i$  tetap dan  $i, l, m$  harus berbeda agar  $\varepsilon_{ilm}$  tidak hilang, sehingga  $l = j$ ,  $m = k$ , atau  $l = k$ ,  $m = j$  hanyalah dua pilihan untuk tidak hilang.
3. Untuk  $l = j$  dan  $m = k$ ,  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ilm}$ . Sehingga  $\varepsilon_{ijk}$  dan  $\varepsilon_{ilm}$  haruslah memiliki tanda yang sama. (Bisa keduanya +1 atau keduanya -1). Sehingga ruas kiri (2.56)  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = +1$ . Dan ruas kanan (2.56) juga sama dengan +1, karena  $l \neq m$

$$\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} = \delta_{ll} \delta_{mm} - \delta_{lm} \delta_{ml} = 1 - 0 = 1.$$

4. Untuk  $l = k$  dan  $m = j$ ,  $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iml} = -\varepsilon_{ilm}$ . Sehingga  $\varepsilon_{ijk}$  dan  $\varepsilon_{ilm}$  memiliki tanda yang berlawanan. (Satunya -1 dan yang lain +1, begitu juga sebaliknya). Sehingga ruas kiri (2.56) nilainya -1. Ruas kanan (2.56) juga nilainya -1 karena  $l \neq m$

$$\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} = \delta_{ml}\delta_{lm} - \delta_{mm}\delta_{ll} = 0 - 1 = -1$$

Hal ini telah melingkupi 81 kasus. Dalam tiap kasus ruas kiri sama dengan ruas kanan. Sehingga (2.56) terbukti.

### 2.2.3 Outer Product

Jika  $S_{i_1 i_2 \dots i_N}$  merupakan tensor rank  $N$  dan  $T_{j_1 j_2 \dots j_M}$  merupakan tensor rank  $M$ , maka  $S_{i_1 i_2 \dots i_N} T_{j_1 j_2 \dots j_M}$  merupakan tensor rank  $(N + M)$ .

Hal ini dikenal sebagai teorema *outer product*.<sup>2</sup> *Outer product* juga dikenal sebagai perkalian langsung. Teorema ini dapat dengan mudah dibuktikan. Pertama tensor ini memiliki komponen sebanyak  $3^{N+M}$ . Di bawah sebuah rotasi

$$\begin{aligned} S'_{i_1 i_2 \dots i_N} &= \sum_{k_1 \dots k_N} a_{i_1 k_1} \dots a_{i_N k_N} S_{k_1 \dots k_N}, \\ T'_{j_1 j_2 \dots j_M} &= \sum_{l_1 \dots l_M} a_{j_1 l_1} \dots a_{j_M l_M} T_{l_1 \dots l_M}, \end{aligned}$$

kita telah menuliskan  $\sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \dots \sum_{j_N=1}^3$  sebagai  $\sum_{j_1 \dots j_N}$

$$\begin{aligned} (S_{i_1 i_2 \dots i_N} T_{j_1 j_2 \dots j_M})' &= S'_{i_1 i_2 \dots i_N} T'_{j_1 j_2 \dots j_M} \\ &= \sum_{k_1 \dots k_N} \sum_{l_1 \dots l_M} a_{i_1 k_1} \dots a_{i_N k_N} a_{j_1 l_1} \dots a_{j_M l_M} S_{k_1 \dots k_N} T_{l_1 \dots l_M}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

yaitu bagaimana tensor rank  $(M + N)$  harus bertransformasi.

Sebagai contoh *outer product* dari dua buah vektor adalah tensor rank dua. Misalkan  $(A_1, A_2, A_3)$  dan  $(B_1, B_2, B_3)$  adalah vektor, sehingga keduanya adalah tensor rank satu. Hasil *outer product*-nya  $A_i B_j$  adalah tensor rank dua. Sembilan buah komponennya dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$A_i B_j = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix}.$$

Karena  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  adalah vektor

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} A_k; \quad B'_j = \sum_{l=1}^3 a_{jl} B_l,$$

mengikuti ini

$$A'_i B'_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} A_k B_l,$$

<sup>2</sup>perkalian luar

yang menunjukkan  $A_i B_j$  adalah tensor rank dua, bersesuaian dengan teorema *outer product*.

Kita juga mengatakan di sini, tensor rank dua yang dibentuk dengan vektor  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  kadang dinyatakan dengan  $\mathbf{AB}$  (tanpa apapun di antaranya). Ketika kita menuliskannya seperti ini, hal ini dinamakan dyad. Kombinasi linier beberapa dyad disebut dyadic. Karena segala sesuatu yang dapat dilakukan dengan vektor dan dyadic dapat juga dilakukan dengan tensor dan matriks, tetapi tidak dengan cara sebaliknya, maka kita tidak akan mendiskusikan dyadic lagi.

**Contoh 2.2.2.** Gunakan teorema *outer product* untuk membuktikan ekspresi pada Contoh 2.2.1

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

adalah tensor rank dua dalam ruang dua dimensi.

**Solusi 2.2.2.** Vektor posisi dua dimensi diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dalam (2.46), telah kita buktikan bahwa

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

adalah vektor dalam ruang dua dimensi. *Outer product* dari keduanya adalah tensor rank dua

$$A_i B_j = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 \end{pmatrix} = T_{ij}.$$

## 2.2.4 Kontraksi

Kita dapat menurunkan rank sebuah tensor dengan teorema berikut. Jika  $T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_N}$  adalah tensor rank  $N$ , maka

$$S_{i_3 \dots i_N} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \delta_{i_1 i_2} T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_N}$$

adalah tensor rank  $(N - 2)$ .

Untuk membuktikan teorema ini, pertama kita perhatikan bahwa  $S_{i_3 \dots i_N}$  memiliki  $3^{N-2}$  komponen. Selanjutnya kita harus menunjukkan

$$S'_{i_3 \dots i_N} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \delta'_{i_1 i_2} T'_{i_1 i_2 i_3 \dots i_N} \quad (2.58)$$

memenuhi aturan transformasi tensor.

Dengan

$$\begin{aligned}\delta'_{i_1 i_2} &= \delta_{i_1 i_2}, \\ T'_{i_1, i_2, \dots, i_N} &= \sum_{j_1 \dots j_N} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_N j_N} T_{j_1 j_2, \dots, j_N},\end{aligned}$$

(2.58) menjadi

$$\begin{aligned}S'_{i_3 \dots i_N} &= \sum_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_2} \sum_{j_1 \dots j_N} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N} \\ &= \sum_{j_1 \dots j_N} \left( \sum_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \right) a_{i_3 j_3} \cdots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N}.\end{aligned}$$

Sekarang

$$\sum_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} = \sum_{i_1} a_{i_1 j_1} a_{i_1 j_2} = \delta_{j_1, j_2},$$

sehingga

$$\begin{aligned}S'_{i_3 \dots i_N} &= \sum_{j_1 \dots j_N} \delta_{i_1 i_2} a_{i_3 j_3} \cdots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N} \\ &= \sum_{j_3 \dots j_N} \left( \sum_{j_1 j_2} \delta_{j_1 j_2} a_{j_1 j_2} T_{j_1, j_2, \dots, j_N} \right) a_{i_3 j_3} \cdots a_{i_N j_N} \\ &= \sum_{j_3 \dots j_N} a_{i_3 j_3} \cdots a_{i_N j_N} S_{j_3 \dots j_N}.\end{aligned}\tag{2.59}$$

Sehingga  $S_{i_3 \dots i_N}$  adalah tensor rank  $(N - 2)$ .

Proses mengalikan dengan  $\delta_{i_1} \delta_{i_2}$  dan menjumlahkan pada  $i_1$  dan  $i_2$  disebut sebagai kontraksi. Sebagai contoh, kita telah menunjukkan bahwa  $A_i B_j$  sebagai *outer product* dari vektor  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$ , adalah tensor rank dua. Kontraksi dari tensor rank dua adalah tensor rank nol yang tidak lain adalah skalar

$$\sum_{ij} \delta_{ij} A_i B_j = \sum_i A_i B_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Hal ini tidak lain adalah perkalian dot antara  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$ .

Kita bisa menyatakan dengan sederhana, tensor baru dengan rank  $(N - 2)$  akan diperoleh jika dua buah indeks tensor rank  $N$  dibuat sama kemudian dijumlahkan. (Bahasa Jerman kontraksi adalah *verjüngung* yang dapat diartikan sebagai *rejuvenation* (Inggris)/peremajaan.) Jika rank sebuah tensor 3 atau lebih, kita dapat mengkontraksi dua buah indeks sebarang. Secara umum kita memperoleh tensor  $(N - 2)$  yang berbeda jika kita kontraksikan pasangan indeks yang berbeda juga. Sebagai contoh dalam tensor rank tiga  $T_{i_1 i_2 i_3} = A_{i_1} B_{i_2} C_{i_3}$ , jika  $i_1$  dan  $i_2$  kita kontraksikan, diperoleh

$$\sum_i T_{i i i_3} = \sum_i A_i B_i C_{i_3} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_{i_3},$$

(ingat bahwa  $C_{i_3}$  dapat merepresentasikan komponen tertentu dari  $\mathbf{C}$ , dapat juga merepresentasikan komponen keseluruhan, yaitu vektor  $\mathbf{C}$  sendiri). Di lain pihak jika  $i_2$  dan  $i_3$  kita kontraksikan, diperoleh vektor yang lain

$$\sum_i T_{i_1 i i} = \sum_i A_{i_1} B_i C_i = A_{i_1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Sehingga dengan mengkontraksikan indeks pertama dan kedua diperoleh sebuah skalar dikalikan dengan sebuah vektor  $\mathbf{C}$ , sedangkan kontraksi indeks kedua dan ketiga diperoleh sebuah skalar dikalikan dengan sebuah vektor  $\mathbf{A}$ .

Kontraksi merupakan salah satu operasi yang sangat penting dalam tensor. Sehingga harus diingat.

### 2.2.5 Konvensi Penjumlahan

Konvensi/perjanjian penjumlahan yang ditemukan Albert Einstein memberikan analisis tensor lebih daya tarik. Kita perhatikan bahwa dalam defnisi tensor, (2.47), semua indeks yang dijumlahkan merupakan indeks berulang. Lebih dari itu, selang penjumlahannya (1 sampai 3) sudah kita ketahui dari konteks diskusi. Sehingga, tanpa mengurangi informasi, kita bisa membuang tanda penjumlahan dengan pemahaman subscript berulang haruslah dijumlahkan pada selang ini. Subscript berulang ini dinamakan subscript “dummy”. Subscript ini hanya bisa muncul paling banyak dua kali dalam satu suku. Pemilihan subscript dummy ini bebas. Menggantikan salah satu indeks dummy dengan yang lain merupakan cara/trik yang sering kita temui dalam analisis tensor yang harus dipelajari. Sebagai contoh, perkalian dot  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  dapat secara sama dinyatakan dengan  $A_i B_i$  atau  $A_k B_k$ , karena keduanya menyatakan hal yang sama, yaitu

$$A_k B_k = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = \sum_{j=1}^3 A_j B_j = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

---

**Contoh 2.2.3.** Nyatakan ekspresi  $A_i B_j C_i$  dengan konvensi penjumlahan dalam suku notasi vektor biasa.

**Solusi 2.2.3.**

$$A_i B_j C_i = \left( \sum_{i=1}^3 A_i C_i \right) B_j = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) B_j.$$


---

Perhatikan di contoh tersebut bahwa indeks yang menentukan vektor mana yang harus kita kalikan dot, bukan dari urutan vektor. Urutan di sini tidak penting. Sehingga  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) B_j = A_k C_k B_j$  tetap valid. Huruf  $j$  di sini adalah subscript bebas, dan dapat digantikan dengan indeks lainnya kecuali subscript dummy. Tetapi, jika suku yang digunakan dalam persamaan, maka subscript bebas tiap suku dalam persamaan tersebut harus dinyatakan dengan huruf yang sama.

---

Dari sekarang dan selanjutnya, jika kita menuliskan sebuah kuantitas dengan  $N$  subscript, jika semua subscriptnya berbeda, maka kita mengasumsikan bahwa itu adalah tensor rank  $N$ . Jika dua di antaranya ada yang sama, maka tensor ini terkontraksi sehingga ranknya  $(N - 2)$ .

**Contoh 2.2.4.** (a) Berapakah rank dari tensor  $\varepsilon_{ijk}A_lB_m$ ? (b) Berapakah rank dari tensor  $\varepsilon_{ijk}A_jB_k$ ? (c) Nyatakan  $\varepsilon_{ijk}A_jB_k$  dalam vektor biasa. **Solusi 2.2.4.** (a) Karena  $\varepsilon_{ijk}$  adalah tensor rank tiga dan  $A_lB_m$  tensor rank dua, maka dengan teorema *outer product*  $\varepsilon_{ijk}A_lB_m$  adalah tensor rank 5. (b)  $\varepsilon_{ijk}A_jB_k$  terkontraksi dua kali sehingga menjadi tensor rank 1 ( $5-4=1$ ). (c)

$$\varepsilon_{ijk}A_jB_k = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}A_jB_k.$$

Jika  $i = 1$ , maka suku tak nol-nya berasal dari  $j = 2$  atau  $3$ , karena  $\varepsilon_{ijk}$  sama dengan nol jika terdapat dua indeks yang sama. Maka jika  $j = 2$  nilai  $k = 3$ . Jika  $j = 3$  maka  $k$  haruslah  $2$ . Sehingga

$$\varepsilon_{1jk}A_jB_k = \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 = A_2B_3 - A_3B_2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Dengan cara yang sama

$$\varepsilon_{2jk}A_jB_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_2, \quad \varepsilon_{3jk}A_jB_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3.$$

Sehingga

$$\varepsilon_{ijk}A_jB_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i.$$

**Contoh 2.2.5.** Tunjukkan bahwa

$$\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

**Solusi 2.2.5.**

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k &= (\varepsilon_{ijk}A_iB_j)C_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k C_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \\ &= \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dengan konvensi penjumlahan (2.56) secara sederhana

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.} \quad (2.60)$$

Banyak identitas vektor dapat dengan cepat dan elegan dibuktikan dengan persamaan ini.



**Contoh 2.2.6.** Tunjukkan bahwa

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

**Solusi 2.2.6.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_i &= \varepsilon_{ijk} B_j C_k \\ [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_l &= \varepsilon_{lmn} A_m (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_n = \varepsilon_{lmn} A_m \varepsilon_{njk} B_j C_k = \varepsilon_{nlm} \varepsilon_{njk} A_m B_j C_k \\ &= \varepsilon_{nlm} \varepsilon_{njk} A_m B_j C_k = (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) A_m B_j C_k \\ &= A_k B_l C_k - A_j B_j C_l = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) B_l - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_l. \end{aligned}$$

Karena komponen yang berkaitan sesuai, identitas tersebut terbukti.

**Contoh 2.2.7.** Tunjukkan bahwa

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

**Solusi 2.2.7.**

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \varepsilon_{kij} A_i B_j \varepsilon_{klm} C_l D_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_i B_k C_l D_m = A_l B_m C_l D_m - A_m B_l C_l D_m \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned}$$

## 2.2.6 Medan Vektor

Sebuah medan tensor rank  $N$ ,  $T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3)$  adalah keseluruhan fungsi  $3^N$  yang pada titik tertentu di ruang  $(x_1, x_2, x_3)$  memberikan sebuah tensor rank  $N$ .

Medan skalar adalah medan tensor rank nol. Kita telah menunjukkan dalam contoh 2.1.5 bahwa gradien medan skalar adalah medan vektor. Terdapat sebuah teorema untuk hubungan medan tensor.

*Jika  $T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3)$  adalah medan tensor rank  $N$ , maka*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3)$$

*adalah medan tensor rank  $N + 1$*

Bukti teorema ini adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3) \right)' &= \frac{\partial}{\partial x'_i} T_{i_1 \dots i_N}(x'_1, x'_2, x'_3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_i} \sum_{j_1 \dots j_N} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1 \dots j_N}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Dengan aturan rantai dan (2.31)

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

sehingga

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3) \right)' = \sum_j \sum_{j_1 \dots j_N} a_{ij} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_N j_N} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{j_1 \dots j_N}(x_1, x_2, x_3), \quad (2.61)$$

yang menunjukkan bagaimana tensor rank  $N + 1$  bertransformasi. Sehingga teoremanya terbukti.

Untuk menyederhanakan penulisan, kita perkenalkan notasi lain yang berguna. Dari sekarang dan selanjutnya, operator diferensial  $\partial/\partial x_i$  dinotasikan dengan  $\partial_i$ . Sebagai contoh

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = \partial_i \varphi,$$

yang merupakan komponen ke- $i$  dari  $\nabla \varphi$ . Hal ini juga bisa merepresentasikan secara keseluruhan dari

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right).$$

Maka  $\partial_i \varphi$  adalah sebuah vektor. (Perhatikan hanya memiliki sebuah subscript.)

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_i \partial_i A_i = \partial_i A_i, \\ (\nabla \times \mathbf{A})_i &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ \nabla^2 \varphi &= \nabla \cdot \nabla \varphi = \partial_i (\nabla \varphi)_i = \partial_i \partial_i \varphi. \end{aligned}$$

Dengan notasi ini, identitas medan vektor dengan mudah didapatkan.

**Contoh 2.2.8.** Buktikan  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ .

**Solusi 2.2.8.**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \partial_i (\nabla \times \mathbf{A})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i A_k && (\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i) \\ &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k && (\text{ganti nama } i \text{ dan } j) \\ &= -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

Sehingga  $2\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ . Maka  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ .

**Contoh 2.2.9.** Buktikan  $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ .

**Solusi 2.2.9.**

$$\begin{aligned} [\nabla \times \nabla \varphi]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \varphi)_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = -\varepsilon_{ikj} \partial_j \partial_k \varphi \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi \quad (\text{ganti nama } j \text{ dan } k) \\ &= -[\nabla \times \nabla \varphi]_i. \end{aligned}$$

Dari sini  $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ .

**Contoh 2.2.10.** Buktikan  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ .

**Solusi 2.2.10.**

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \mathbf{A})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m \\ &= \partial_m \partial_i A_m - \partial_l \partial_l A_i = \partial_i \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_i \\ &= [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})]_i - (\nabla^2 \mathbf{A})_i. \end{aligned}$$

Sehingga  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla^2 \mathbf{A})$ , karena komponen yang berkaitan sesuai.

**Contoh 2.2.11.** Buktikan  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ .

**Solusi 2.2.11.**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \partial_i (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k + \varepsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k) = (\varepsilon_{ijk} \partial_i A_j) B_k - A_j (\varepsilon_{ijk} \partial_i B_k) \\ &= (\nabla \times \mathbf{A})_k B_k - A_j (\nabla \times \mathbf{B})_j = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

**Contoh 2.2.12.** Buktikan

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

**Solusi 2.2.12.**

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j (A_l B_m) = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\ &= B_m \partial_m A_i - B_i \partial_l A_l + A_i \partial_m B_m - A_l \partial_l B_i \\ &= [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_i. \end{aligned}$$

Karena komponen yang berkaitan sesuai, dua ruas persamaan tersebut haruslah sama.

### 2.2.7 Aturan Pembagian

Cara lain untuk menentukan kuantitas dengan dua buah subscript adalah tensor rank dua adalah dengan aturan pembagian berikut ini.

Jika untuk sebarang vektor  $\mathbf{B}$ , hasil dari menjumlahkan indeks  $j$  pada perkalian  $K_{ij}B_j$  adalah vektor lain  $\mathbf{A}$

$$A_i = K_{ij}B_j, \quad (2.62)$$

dan (2.62) berlaku untuk semua sistem koordinat Cartesian, maka  $K_{ij}$  adalah benar-benar tensor rank dua.

Untuk membuktikan aturan pembagian, kita menguji komponen  $\mathbf{A}$  dalam sistem terotasi

$$A'_i = a_{il}A_l = a_{il}K_{lm}B_m.$$

Karena  $\mathbf{B}$  adalah sebuah vektor

$$B_m = a_{jm}B'_j.$$

Diperoleh

$$A'_i = a_{il}K_{lm}B_m = a_{il}K_{lm}a_{jm}B'_j = a_{il}a_{jm}K_{lm}B'_j.$$

Tetapi karena (2.62) berlaku untuk semua sistem

$$A'_i = K'_{ij}B'_j.$$

Dengan mengurangkan kedua persamaan terakhir

$$(K'_{ij} - a_{il}a_{jm}K_{lm})B'_j = 0.$$

Karena  $B'_j$  sebarang

$$K'_{ij} = a_{il}a_{jm}K_{lm}.$$

Sehingga  $K_{ij}$  adalah tensor rank dua.

Dengan prosedur yang sama, kita dapat menunjukkan bahwa sebuah tensor rank  $M$  berhubungan secara linier dengan tensor rank  $N$  melalui sebuah kuantitas  $T$  dengan subscript sejumlah  $M + N$ , dan hubungan ini berlaku untuk semua sistem, maka  $T$  adalah tensor rank  $M + N$ .

**Contoh 2.2.13.** Jika  $T_{ij}x_ix_j$  sama dengan sebuah skalar  $S$ , tunjukkan bahwa  $T_{ij}$  adalah tensor rank dua.

**Solusi 2.2.13.** Karena  $x_ix_j$  merupakan *outer product* dua buah vektor posisi, maka ini

adalah tensor rank dua. Skalar  $S$  adalah tensor rank nol, sehingga dengan aturan pembagian  $T_{ij}$  adalah tensor rank dua ( $2 + 0 = 2$ ). Kita bisa menunjukkannya dengan melihat komponennya dalam sistem terotasi

$$\begin{aligned} S &= T_{ij}x_ix_j = T_{lm}x_lx_m. \quad x_l = a_{il}x'_i; \quad x_m = a_{jm}x'_j. \\ S &= T_{lm}a_{il}x'_ia_{jm}x'_j = a_{il}a_{jm}T_{lm}x'_ix'_j, \\ S' &= T'_{ij}x'_ix'_j, \quad S' = S. \end{aligned}$$

Sehingga

$$(T'_{ij} - a_{il}a_{jm}T_{lm})x'_ix'_j = 0; \quad T'_{ij} = a_{il}a_{jm}T_{lm}.$$

Maka  $T_{ij}$  adalah tensor rank dua.

### 2.2.8 Sifat Simetri Tensor

Sebuah tensor  $S_{ijk\dots}$  disebut simetrik dalam indeks  $i$  dan  $j$  jika

$$S_{ijk\dots} = S_{jik\dots}$$

Sebuah tensor  $A_{ijk\dots}$  disebut anti simetrik dalam indeks  $i$  dan  $j$  jika

$$A_{ijk\dots} = -A_{jik\dots}$$

Sebagai contoh *outer product*  $\mathbf{r}$  dengan dirinya  $x_ix_j$  adalah tensor simetrik rank dua, delta Kronecker  $\delta_{ij}$  juga merupakan tensor simetrik rank dua. Di sisi lain tensor Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$  adalah anti simetrik pada dua indeksnya, karena  $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ .

Simetri adalah sifat fisik tensor. Sifat ini invarian dalam transformasi koordinat. Sebagai contoh, jika  $S_{ij}$  adalah tensor simetrik dalam sistem koordinat tertentu, dalam sebuah sistem terotasi

$$S'_{lm} = a_{li}a_{mj}S_{ij} = a_{mj}a_{li}S_{ji} = S'_{ml}.$$

Maka  $S_{ij}$  juga merupakan tensor simetrik dalam sistem yang baru. Hasil yang sama juga diperoleh untuk tensor anti simetrik.

Tensor simetrik rank dua  $S_{ijk}$  dapat dituliskan dalam bentuk

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix},$$

sedangkan tensor anti simetrik  $A_{ijk}$  memiliki bentuk

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ -A_{12} & 0 & S_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

Sehingga sebuah tensor simetrik rank dua memiliki enam buah komponen bebas, sedangkan sebuah tensor anti simetrik rank dua hanya memiliki tiga buah komponen bebas.

Tensor rank dua sebarang  $T_{ij}$  dapat direpresentasikan sebagai jumlah sebuah tensor simetrik dan sebuah tensor anti simetrik. Jika diberikan  $T_{ij}$ , kita dapat membangun

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Jelas bahwa  $S_{ij}$  simetrik dan  $A_{ij}$  anti simetrik. Selanjutnya

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}.$$

Sehingga sebuah tensor rank dua sebarang memiliki bagian simetrik dan anti simetrik.

Dalam teori matriks sudah kita pelajari bahwa enam buah elemen bebas sebuah matriks dapat direpresentasikan dengan permukaan kuadrat. Dengan cara yang sama, sebuah tensor simetrik rank dua dapat dinyatakan dengan sebuah elipsoid yang unik

$$T_{ij}x_ix_j = \pm 1,$$

dengan tanda  $\pm$  adalah untuk determinan  $|T_{ij}|$ .

Tiga buah komponen bebas sebuah tensor anti simetrik rank dua juga dapat dinyatakan secara geometrik dengan sebuah vektor.

### 2.2.9 Pseudotensor

Salah satu alasan mengapa tensor berguna adalah tensor memungkinkan kita merumuskan hukum-hukum fisika yang bebas terhadap arah ruang tertentu. Kita juga mengharapkan bahwa tensor juga bebas apakah kita menggunakan sistem sumbu tangan kanan maupun sistem sumbu tangan kiri. Tetapi tidak semua tensor berperilaku sama ketika kita mentransformasikannya dari sistem sumbu tangan kanan menjadi tangan kiri.

Sejauh ini pembahasan kita terbatas pada rotasi dengan aturan tangan kanan. Aturan tangan kanan dinyatakan dengan menamai tiga buah vektor basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  sedemikian rupa sehingga jempol memiliki arah  $\mathbf{e}_3$  sedangkan empat buah jari lainnya dapat berputar (curl) dari  $\mathbf{e}_1$  ke  $\mathbf{e}_2$  tanpa harus melalui negatif  $\mathbf{e}_2$ . Sebuah sistem tangan kanan dapat dirotasikan menjadi sistem tangan kanan yang lain. Determinan matriks rotasi sama dengan satu seperti pada contoh 2.1.2.

Sekarang mari kita perhatikan akibat inversi (balikkan). Tiga buah vektor basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  dirubah menjadi  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$  sehingga

$$\mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_3.$$

Sumbu koordinat baru ini adalah sistem tangan kiri. Dinamakan aturan tangan kiri karena ketika kita menggunakan tangan kiri, jempol memiliki arah  $\mathbf{e}'_3$  sedangkan empat buah jari lainnya dapat berputar (curl) dari  $\mathbf{e}'_1$  ke  $\mathbf{e}'_2$  tanpa harus melalui negatif  $\mathbf{e}'_2$ . Perhatikan kita tidak dapat merotasikan aturan tangan kanan menjadi aturan tangan kiri.

Jika kita menggunakan aturan tangan kanan yang sama untuk definisi perkalian silang dalam semua sistem, sehingga dengan sumbu tangan kanan

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1,$$

dan dengan sumbu tangan kiri

$$(\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3 = -1.$$

Vektor posisi

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

jika dinyatakan dalam sistem yang dibalik menjadi

$$\mathbf{r}' = -x_1\mathbf{e}'_1 - x_2\mathbf{e}'_2 - x_3\mathbf{e}'_3.$$

Dengan kata lain hal ini adalah vektor yang sama  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , kecuali dalam sistem aksen keefisiennya menjadi negatif karena sumbunya dibalik. Vektor berperilaku seperti ini ketika koordinatnya dirubah dari sistem tangan kanan menjadi sistem tangan kiri disebut vektor polar (kutub). Vektor ini adalah vektor reguler.

Perbedaan mendasar muncul ketika kita menemui perkalian silang dua buah vektor polar. Komponen  $\mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$  diberikan oleh

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2,$$

dan begitu seterusnya. Sekarang jika sumbu koordinatnya dibalik,  $A_i$  menjadi  $-A_i$ ,  $B_i$  menjadi  $-B_i$  tetapi  $C_i$  menjadi  $+C_i$  karena merupakan hasil perkalian dua buah bilangan (vektor) negatif. Hal ini tidak berperilaku seperti vektor polar di bawah inversi. Untuk membedakan, perkalian silang disebut *pseudo vektor*, juga dikenal sebagai vektor aksial.

Sebagai tambahan pada inversi, pencerminan (membalik satu sumbu) dan menukar dua buah sumbu juga mentransformasi sistem tangan kanan menjadi sistem tangan kiri. Matriks transformasi dari operasi kanan-kiri adalah sebagai berikut.

Inversi:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pencerminan terhadap bidang  $x_2x_3$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Menukar sumbu  $x_1$  dan  $x_2$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$x'_i = a_{ij}x_j.$$

Jelas bahwa determinan dari matriks transformasi  $|a_{ij}|$  semuanya sama dengan -1. Sebuah sistem tangan kiri dapat dirotasikan menjadi sistem tangan kiri yang lain dengan sudut Euler sama seperti sistem tangan kanan. Maka, jika matriks  $(a_{ij})$  mentransformasikan sistem tangan kanan menjadi sistem tangan kiri, atau sebaliknya, determinan  $|a_{ij}|$  selalu sama dengan -1. Selanjutnya, kita dapat menunjukkan, dengan cara yang sama dengan matriks rotasi, elemennya juga memenuhi syarat ortogonalitas:

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Sehingga transformasi ini juga merupakan transformasi ortogonal.

Maka transformasi ortogonal dapat dibagi menjadi dua jenis: transformasi proper (sejati) dengan determinan  $|a_{ij}|$  sama dengan 1, dan transformasi improper dengan determinan sama dengan -1. Jika transformasinya merupakan sebuah rotasi, maka ini merupakan transformasi proper. Jika transformasinya merubah sistem tangan kanan menjadi sistem tangan kiri, maka transformasinya improper.

Sebuah pseudovektor dapat didefinisikan memenuhi aturan transformasi berikut

$$V'_i = |a_{ij}|a_{ij}V_j.$$

Jika transformasinya proper, vektor polar dan pseudotensor bertransformasi dengan cara yang sama. Jika transformasinya improper, vektor polar bertransformasi sebagai vektor reguler, tetapi pseudotensor berubah arah.

Pseudotensor didefinisikan dengan cara yang sama. Komponen sebuah pseudotensor rank  $N$  bertransformasi menurut aturan

$$T'_{i_1 \dots i_N} = |a_{ij}|a_{i_1 j_1} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1 \dots j_N}, \quad (2.63)$$

yang benar-benar sama dengan tensor reguler, kecuali determinan  $|a_{ij}|$ .

Dari definisi ini:

1. *Outer product* dua buah pseudotensor rank  $M$  dan  $N$  adalah tensor reguler rank  $M+N$ .
2. *Outer product* sebuah pseudotensor rank  $M$  dan sebuah tensor rank  $N$  memberikan sebuah pseudotensor rank  $M+N$ .
3. Kontraksi sebuah pseudotensor rank  $N$  adalah sebuah pseudotensor rank  $N-2$ .

Pseudotensor rank nol adalah sebuah pseudoskalar, yang berubah tanda di bawah inversi, sedangkan skalar tidak berubah. Sebuah contoh pseudoskalar adalah perkalian tiga skalar  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ . Perkalian silang  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  adalah pseudotensor rank satu, vektor polar  $\mathbf{C}$  adalah



tensor reguler rank 1. Maka  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i \cdot C_i = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  adalah kontraksi pseudotensor rank dua  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i \cdot C_j$ , sehingga sebuah pseudoskalar. Jika  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  adalah tiga buah sisi paralelepiped maka  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  adalah volumenya. Jika didefinisikan dengan cara ini, volume adalah pseudoskalar.

Kita telah menunjukkan  $\varepsilon_{ijk}$  adalah sebuah tensor isotropik rank tiga di bawah rotasi. Kita sekarang akan menunjukkan bahwa  $\varepsilon_{ijk}$  sama untuk kedua sistem baik tangan kanan maupun tangan kiri, maka  $\varepsilon_{ijk}$  dapat dianggap sebagai pseudotensor rank tiga. Hal ini karena jika kita menginginkan  $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$  di bawah transformasi proper dan improper, maka  $\varepsilon_{ijk}$  harus dinyatakan sebagai

$$\varepsilon'_{ijk} = |a_{ij}| a_{il} a_{jm} a_{nk} \varepsilon_{lmn}. \quad (2.64)$$

Karena

$$a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} |a_{ij}|,$$

sperti pada (2.54), mengikuti (2.64) yaitu

$$\varepsilon'_{ijk} = |a_{ij}| \varepsilon_{ijk} |a_{ij}| = |a_{ij}|^2 \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}.$$

Sehingga  $\varepsilon_{ijk}$  adalah pseudotensor rank tiga.

**Contoh 2.2.14.** Misalkan  $T_{12}, T_{13}, T_{23}$  adalah komponen bebas sebuah tenor anti simetrik, buktikan bahwa  $T_{23}, -T_{13}, T_{12}$  dapat dipandang sebagai komponen pseudovektor.

**Solusi 2.2.14.** Karena  $\varepsilon_{ijk}$  adalah pseudotensor rank tiga,  $T_{jk}$  adalah tensor rank dua, setelah kita kontraksikan dua kali

$$C_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}$$

hasilnya  $C_i$  adalah pseudotensor rank satu, yang tidak lain pseudovektor. Karena  $T_{ij} = -T_{ji}$  maka

$$T_{21} = -T_{12}, \quad T_{31} = -T_{13}, \quad T_{32} = -T_{23}.$$

Sekarang

$$C_1 = \varepsilon_{123} T_{23} + \varepsilon_{132} T_{32} = T_{23} - T_{32} = 2T_{23},$$

$$C_2 = \varepsilon_{213} T_{13} + \varepsilon_{231} T_{31} = -T_{13} + T_{31} = -2T_{13},$$

$$C_3 = \varepsilon_{312} T_{12} + \varepsilon_{321} T_{21} = T_{12} - T_{21} = 2T_{12}.$$

Karena  $(C_1, C_2, C_3)$  adalah pseudovektor, maka  $(T_{23}, -T_{13}, T_{12}, )$  juga merupakan pseudovektor.

**Contoh 2.2.15.** Gunakan kenyataan bahwa  $\varepsilon_{ijk}$  adalah pseudotensor rank tiga untuk membuktikan  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  adalah sebuah pseudotensor.

**Solusi 2.2.15.** Misalkan  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  sehingga

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

jika dinyatakan dalam sistem baru dengan  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  ditransformasikan menjadi  $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ , perkalian silangnya menjadi  $\mathbf{C}' = \mathbf{A}' \times \mathbf{B}'$  yang dapat dituliskan dalam komponennya

$$C'_l = \varepsilon'_{lmn} A'_m B'_n$$

karena  $\varepsilon_{ijk}$  adalah pseudotensor

$$\varepsilon'_{lmn} = |a_{ij}| a_{li} a_{mj} a_{nk} \varepsilon_{ijk},$$

sehingga  $C'_l$  menjadi

$$C'_l = |a_{ij}| a_{li} a_{mj} a_{nk} \varepsilon_{ijk} A'_m B'_n.$$

Tetapi

$$A_j = a_{mj} A'_m, \quad B_k = a_{nk} B'_n,$$

sehingga

$$C'_l = |a_{ij}| a_{li} \varepsilon_{ijk} A_j B_k = |a_{ij}| a_{li} C_i.$$

Maka  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  adalah pseudovektor.

Karena persamaan matematik yang mendeskripsikan hukum-hukum fisika haruslah bebas sistem koordinat, kita tidak dapat menyamakan tensor dengan rank berbeda karena memiliki sifat yang berbeda di bawah rotasi. Sama seperti ini, dalam fisika klasik, kita tidak dapat menyamakan pseudotensor dengan tensor karena bertransformasi secara berbeda dengan inversi. Tetapi, terdapat kejutan alam di bawah gaya lemah dapat membedakan sistem tangan kiri dengan sistem tangan kanan. Dengan memperkenalkan pseudotensor, peristiwa yang merusak paritas dapat dideskripsikan.

## 2.3 Contoh Fisika

### 2.3.1 Tensor Momen Inersia

Salah satu tensor rank dua yang paling sering ditemui adalah tensor momen inersia. Tensor ini menghubungkan momentum sudut  $\mathbf{L}$  dan kecepatan sudut  $\boldsymbol{\omega}$  dari gerak rotasi sebuah benda tegar. Momentum sudut  $\mathbf{L}$  sebuah benda tegar yang berotasi pada titik tertentu diberikan oleh

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm,$$

dengan  $\mathbf{r}$  adalah vektor posisi dari titik tertentu (tetap) ke elemen massa  $dm$  dan  $\mathbf{v}$  adalah kecepatan  $dm$ . Kita telah menunjukkan

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dm \\ &= \int [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]dm. \end{aligned}$$

Jika kita tuliskan dalam notasi tensor dengan konvensi penjumlahan, komponen ke- $i$  dari  $\mathbf{L}$  adalah

$$L_i = \int [r^2\omega_i - x_j\omega_j x_i]dm.$$

Karena

$$\begin{aligned} r^2\omega_i &= r^2\omega_j\delta_{ij}, \\ L_i &= \omega_j \int [r^2\delta_{ij} - x_j x_i]dm = I_{ij}\omega_j, \end{aligned}$$

dengan  $I_{ij}$  dikenal sebagai tensor momen inersia, diberikan oleh

$$I_{ij} = \int [x_k x_k \delta_{ij} - x_j x_i]dm. \quad (2.65)$$

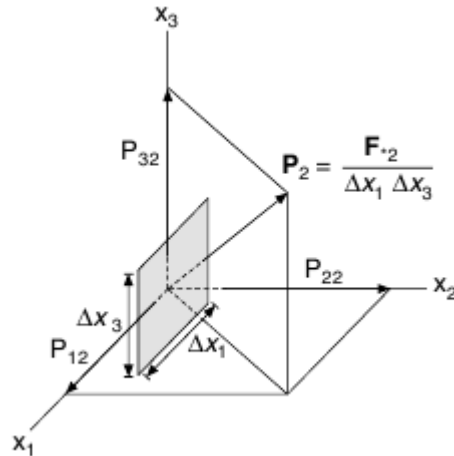
Karena  $\delta_{ij}$  dan  $x_i x_j$  keduanya tensor rank dua,  $I_{ij}$  tensor simetrik rank dua. Secara eksplisit komponen tensor ini adalah

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \int (x_2^2 + x_3^2)dm & - \int x_1 x_2 dm & - \int x_1 x_3 dm \\ - \int x_2 x_1 dm & \int (x_1^2 + x_3^2)dm & - \int x_2 x_3 dm \\ - \int x_3 x_1 dm & - \int x_3 x_2 dm & \int (x_2^2 + x_1^2)dm \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

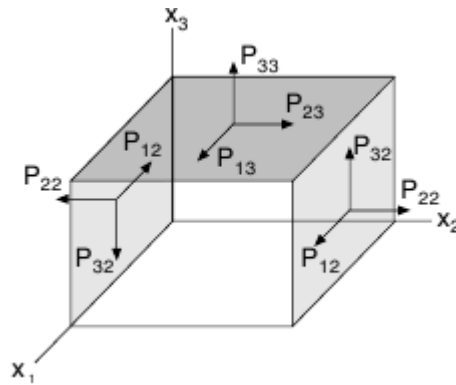
### 2.3.2 Tensor Stress

Nama tensor berasal dari gaya regangan dalam teori elastisitas. Di dalam benda elastik, terdapat gaya antara bagian bertetangga dari material. Bayangkan sebuah irisan pada benda, material di sebelah kanan memberikan gaya sebesar  $\mathbf{F}$  pada material di sebelah kiri, dan material pada sebelah kiri memberikan gaya yang sama dan berlawanan arah  $-\mathbf{F}$  pada material di sebelah kanan.

Marilah kita uji material melalui luas yang kecil  $\Delta x_1 \Delta x_3$ , Gambar 2.3, dalam bidang imajiner yang tegak lurus sumbu  $x_2$ . Jika luas daerah tersebut cukup kecil, kita mengharapkan gaya sebanding dengan luas. Sehingga kita dapat mendefinisikan stress/tekanan  $\mathbf{P}_2$  sebagai gaya per satuan luas. Subscript 2 mengindikasikan bahwa gaya yang bekerja pada bidang tegak lurus sumbu  $x_2$  positif. Komponen  $\mathbf{P}_2$  sepanjang sumbu  $(x_1, x_2, x_3)$  secara berurutan diberikan oleh  $P_{12}, P_{22}, P_{32}$ . Sekarang kita dapat melihat pada luas daerah kecil pada bidang yang tegak lurus sumbu  $x_1$  dan mendefinisikan komponen stress sebagai  $P_{11}, P_{21}, P_{31}$ .



Gambar 2.3: Stress  $\mathbf{P}_2$ , didefinisikan sebagai gaya per satuan luas, pada luas daerah yang kecil tegak lurus sumbu  $x_2$ . Komponennya sepanjang tiga buah sumbu secara berurutan adalah  $P_{12}, P_{22}, P_{32}$



Gambar 2.4: Sembilan buah komponen sebuah tensor stress pada sebuah titik dapat direpresentasikan sebagai gaya normal dan tangensial pada sebuah kubus tak hingga di sekeliling titik

Sekarang bayangkan bahwa irisannya tegak lurus sumbu  $x_3$  sehingga  $P_{13}, P_{23}, P_{33}$  juga bisa didefinisikan dengan cara yang sama. Jika  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  adalah vektor basis satuan, hubungan ini dapat dinyatakan

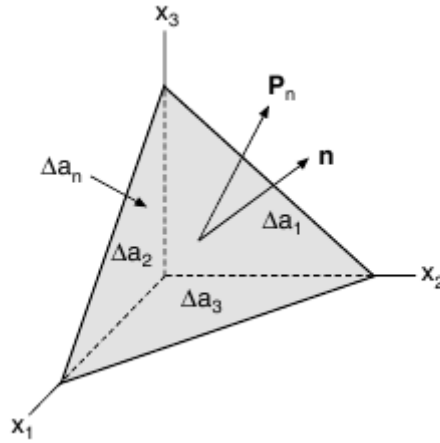
$$\mathbf{P}_j = P_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (2.67)$$

Komponen stress berjumlah sembilan yaitu:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Subscript pertama pada  $P_{ij}$  mengindikasikan arah dari komponen gaya, subscript kedua mengindikasikan arah normal pada permukaan tempat gaya bekerja.

Arti fisis dari  $P_{ij}$  adalah sebagai berikut. Bayangkan kubus tak hingga banyaknya di sekeliling titik di dalam material, seperti Gambar 2.4. Agar jelas, gaya hanya dilukiskan



Gambar 2.5: Gaya pada permukaan tetrahedron tak hingga. Syarat kesetimbangan mengharuskan tensor stress adalah tensor rank dua.

dalam tiga permukaan. Terdapat gaya normal  $P_{ii}$  (regangan ditunjukkan tetapi dapat ditekan dengan panah terbalik) dan gaya tangensial/singgung  $P_{ij}$  ( $i \neq j$ , *shear*). Perhatikan bahwa dalam kesetimbangan, gaya dalam permukaan berlawanan haruslah sama besar dan berlawanan arah. Lebih dari itu (2.67) simetrik  $P_{ij} = P_{ji}$ , karena adanya kesetimbangan rotasional. Sebagai contoh gaya *shear* pada permukaan atas dalam arah  $x_2$  adalah  $P_{23}\Delta x_1\Delta x_2$ . Torsi di sekitar sumbu  $x_1$  karena gaya ini adalah  $(P_{23}\Delta x_1\Delta x_2)\Delta x_3$ . Torsi yang berlawanan karena gaya *shear* pada permukaan kanan adalah  $(P_{32}\Delta x_3\Delta x_1)\Delta x_2$ . Karena torsi di sekitar sumbu  $x_1$  harus nol, maka

$$(P_{23}\Delta x_1\Delta x_2)\Delta x_3 = (P_{32}\Delta x_3\Delta x_1)\Delta x_1$$

dan kita memiliki

$$P_{23} = P_{32}.$$

Dengan argumen yang sama kita dapat membuktikan secara umum  $P_{ij} = P_{ji}$ , sehingga (2.68) simetrik.

Sekarang kita akan membuktikan sembilan koeponen (2.68) adalah sebuah tensor, dikenal sebagai tensor stress. Untuk tujuan ini, kita membuat tetrahedron tak hingga dengan sisinya berarah sepanjang sumbu koordinat pada Gambar 2.5. Misalkan  $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3$  merupakan luas permukaan tegak lurus pada sumbu  $x_1, x_2, x_3$ , gaya per satuan luasnya adalah  $-\mathbf{P}_1, -\mathbf{P}_2, -\mathbf{P}_3$ , karena permukaan ini arahnya ke sumbu negatif. Misalkan  $\Delta a_n$  adalah luas permukaan terinklinsi dengan satuan normal eksterior  $\mathbf{n}$  dan  $\mathbf{P}_n$  adalah gaya per satuan luas permukaan ini. Gaya total pada keempat permukaan ini haruslah nol, meskipun terdapat gaya benda, seperti gravitasi. Gaya benda akan sebanding dengan volume, sedangkan semua gaya permukaan akan sebanding dengan luas. Karena dimensinya menuju nol, gaya benda akan sangat kecil dibandingkan dengan gaya permukaan dan dapat diabaikan. Sehingga

$$\mathbf{P}_n\Delta a_n - \mathbf{P}_1\Delta a_1 - \mathbf{P}_2\Delta a_2 - \mathbf{P}_3\Delta a_3 = \mathbf{0}. \quad (2.69)$$

Karena  $\Delta a_1$  adalah luas  $\Delta a_n$  yang diproyeksikan pada bidang  $x_2x_3$ , sehingga

$$\Delta a_1 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)\Delta a_n.$$

Dengan ekspresi yang sama untuk  $\Delta a_2$  dan  $\Delta a_3$ , kita dapat menuliskan (2.69) dalam bentuk

$$\mathbf{P}_n \Delta a_n = \mathbf{P}_1(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)\Delta a_n + \mathbf{P}_2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2)\Delta a_n + \mathbf{P}_3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3)\Delta a_n,$$

atau

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{P}_k. \quad (2.70)$$

Apa yang kita inginkan adalah mencari komponen tensor stress dalam sistem terotasi dengan sumbu  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ . Sekarang tanpa kehilangan generalisasi, kita dapat mengasumsikan sumbu ke- $j$  sistem terotasi berarah sepanjang  $\mathbf{n}$ , yaitu

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}'_j.$$

Sehingga  $\mathbf{P}_n$  adalah  $\mathbf{P}'_j$  dalam sistem terotasi. Sehingga (2.70) menjadi

$$\mathbf{P}'_j = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{P}_k. \quad (2.71)$$

Dalam suku komponen-komponennya sepanjang sumbu koordinat, seperti pada (2.67)

$$\mathbf{P}'_j = P'_{ij}\mathbf{e}'_i, \quad \mathbf{P}_k = P_{lk}\mathbf{e}_l$$

persamaan terakhir dapat dituliskan

$$P'_{ij}\mathbf{e}'_i = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k)P_{lk}\mathbf{e}_l.$$

Lakukan perkalian titik dengan  $\mathbf{e}'_i$  pada kedua ruas

$$P'_{ij}(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_i) = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k)P_{lk}(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}'_i).$$

kita mempunyai

$$P'_{ij} = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_l)(\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k)P_{lk}.$$

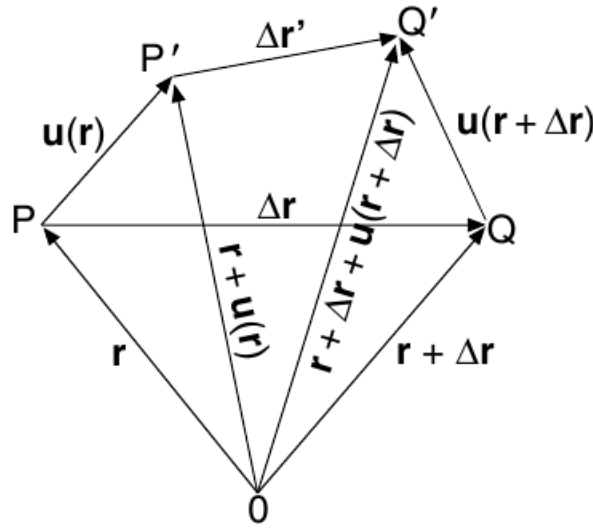
Karena  $(\mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}_n) = a_{mn}$ , kita melihat bahwa

$$P'_{ij} = a_{il}a_{jk}P_{lk}. \quad (2.72)$$

Sehingga barisan komponen stress (2.68) adalah tensor.

### 2.3.3 Tensor Strain dan Hukum Hooke

Di bawah gaya yang diberikan, benda elastik akan berdeformasi yang meregang. Deformasinya dikarakterisasi oleh perubahan jarak antara titik-titik bertetangga. Misalkan  $P$  pada  $\mathbf{r}$  dan  $Q$  pada  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$  adalah dua titik berdekatan seperti pada Gambar 2.6. Ketika bendanya terdeformasi,  $P$  bergeser sejauh  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  ke titik  $P'$  dan  $Q$  sebesar  $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$  ke titik  $Q'$ . Jika



Gambar 2.6: Regangan dari sebuah benda elastik. Sebuah benda teregang apabila jarak relatif dua buah titik berdekatan berubah. Tensor strain bergantung pada variasi vektor perpindahan  $\mathbf{u}$  terhadap vektor posisi  $\mathbf{r}$ .

perubahan jarak kedua titik ini sama, yaitu jika  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ , posisi relatif kedua titik tidak berubah. Bagian benda tersebut tidak teregang, karena jarak  $PQ$  dan  $P'Q'$  sama. Maka strain/regangan berasosiasi dengan variasi vektor perpindahan  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Perubahan  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  dapat dituliskan

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}).$$

Dengan mengabaikan suku orde kedua dan yang lebih tinggi, komponen  $\Delta\mathbf{u}$  dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \Delta x_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j. \end{aligned}$$

Karena  $u_i$  adalah vektor dan  $\partial/\partial x_j$  adalah operator vektor,  $\partial u_i/\partial x_j$  adalah *outer product* dari dua buah tensor rank satu. Sehingga  $\partial u_i/\partial x_j$  adalah tensor rank dua. Tensor ini dapat didekomposisi dalam bagian simetrik dan anti simetrik

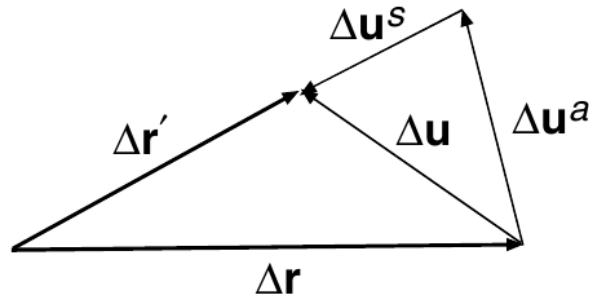
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.73)$$

Kita juga dapat membagi  $\Delta\mathbf{u}$  menjadi dua bagian

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}^s + \Delta\mathbf{u}^a,$$

dengan

$$\begin{aligned} \Delta u_i^s &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_j, \\ \Delta u_i^a &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_j. \end{aligned}$$



Gambar 2.7: Perubahan jarak antara dua buah titik berdekatan dalam benda elastik. Perubahan ini ditentukan oleh tensor strain simetrik.

Suku anti simetrik (2.73) tidak merubah jarak antara  $P$  dan  $Q$  karena hal berikut. Misalkan jarak  $P'Q'$  adalah  $\Delta \mathbf{r}'$ . Jelas dari Gambar 2.6 yaitu

$$\Delta \mathbf{r}' = [\Delta \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})] - \mathbf{u}(\mathbf{r}).$$

Sekarang

$$\Delta \mathbf{r}' - \Delta \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^a.$$

Hal ini karena dalam ekspresi ini, baik  $i$  dan  $j$  adalah indeks yang dijumlahkan dan dapat ditukar. Sehingga  $\Delta \mathbf{u}^a$  tegak lurus dengan  $\Delta \mathbf{r}$  dan dapat dianggap sebagai panjang busur infinitesimal sebuah rotasi di sekitar ekor  $\Delta \mathbf{r}$ , seperti pada Gambar 2.7

Sehingga  $\Delta \mathbf{u}^a$  tidak merubah panjang vektor  $\Delta \mathbf{r}$ . Perubahan jarak antara dua titik berdekatan sebuah benda elastik ditentukan secara unik oleh suku simetrik (2.73)

$$\mathbf{u}^a \cdot \Delta \mathbf{r} = \Delta u_i^a \Delta x_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_j \Delta x_i = 0.$$

Kuantitas ini dinamakan tensor strain. Tensor strain ini memiliki peran penting dalam teori elastisitas karena mengukur derajat deformasi.

Karena gaya elastik satu dimensi dalam sebuah pegas diberikan oleh hukum Hooke  $F = -kx$ , kita bisa mengharapkan dalam media elastik tiga dimensi strain/regangan sebanding dengan stress/tekanan. Untuk kebanyakan benda padat dengan regangan relatif beberapa persen, hal ini berlaku. Hubungan linier antara tensor strain dengan tensor stress diberikan oleh hukum Hooke

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.74)$$

dengan  $c_{ijkl}$  dikenal sebagai tensor elastisitas. Karena  $P_{ij}$  dan  $E_{kl}$  keduanya tensor rank dua, dengan aturan pembagian  $c_{ijkl}$  haruslah tensor rank empat. Terdapat 81 komponen dalam tensor rank empat, tetapi karena beberapa simetri jumlah komponen bebasnya dalam benda kristalin hanya 21. Jika bendanya isotropik, konstanta elastik direduksi lebih lanjut sehingga hanya dua. Kita tidak akan membahas hal ini secara mendalam karena merupakan subjek dari buku tentang elastisitas, di sini kita hanya menunjukkan konsep tensor sangat berguna dalam mendeskripsikan kuantitas fisik.



$$P_{ij} = c_{ijkl} E_{kl}, \quad (2.75)$$

## Latihan

1. Carilah matriks rotasi untuk

- (a) rotasi  $\pi/2$  pada sumbu  $-z$ .
- (b) rotasi  $\pi$  pada sumbu  $x$

Jawab :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dengan menggunakan matriks transformasi ( $A$ ) yang diberikan pada (2.20) tunjukkan bahwa

$$(A)(A^T) = (I),$$

dengan ( $I$ ) adalah matriks identitas.

3. Dengan menggunakan matriks transformasi ( $A$ ) yang diberikan pada (2.20), secara eksplisit buktikan bahwa

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk},$$

(a)  $j = 1, k = 1$  (b)  $j = 1, k = 2$  (c)  $j = 1, k = 3$ .

4. Dengan menggunakan matriks transformasi ( $A$ ) yang diberikan pada (2.20), secara eksplisit buktikan bahwa determinan ( $A$ ) sama dengan 1.

5. Tunjukkan bahwa tidak terdapat tensor isotropik rank satu nontrivial (semuanya trivial).

Petunjuk: (1) Asumsikan terdapat sebuah tensor isotropik rank satu ( $A_1, A_2, A_3$ ). Di bawah rotasi  $A_1 = A'_1, A_2 = A'_2, A_3 = A'_3$  karena isotropik. (2) Lakukan rotasi sebesar  $\pi/2$  pada sumbu  $x_3$  dan tunjukkan bahwa  $A_1 = 0, A_2 = 0$ . (3) Rotasi pada sumbu  $x_1$  akan memberikan  $A_1 = 0$ . (4) Sehingga hanya vektor nol yang merupakan tensor isotropik rank satu.

6. Misalkan

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Carilah kontraksi berikut

- (a)  $B_i = T_{ij}A_j$ .  
 (b)  $C_j = T_{ij}A_i$   
 (c)  $S = T_{ij}A_iA_j$

Jawab: (a)  $B_i = (5, 5, 10)$ , (b)  $C_i = (4, 6, 11)$ , (c)  $S = 35$ .

7. Misalkan  $A_{ij}$  dan  $B_{ij}$  tensor rank dua dan

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Tunjukkan bahwa  $C_{ij}$  juga tensor rank dua.

8. Persamaan sebuah elips yang berpusat di titik asal berbentuk

$$A_{ij}x_ix_j = 1.$$

Buktikan bahwa  $A_{ij}$  tensor rank dua.

Petunjuk: Dalam sistem terotasi, persamaan permukaan  $A'_{ij}x'_ix'_j = 1$ .

9. Buktikan

$$A_i = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

adalah sebuah vektor 2 dimensi

10. Buktikan bahwa matriks  $2 \times 2$  berikut merepresentasikan tensor rank dua dalam ruang dua dimensi

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{pmatrix} -x_1x_2 & x_1^2 \\ -x_2^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}, & \text{(b)} & \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}, \\ \text{(c)} & \begin{pmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 \\ x_1^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}, & \text{(d)} & \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Petunjuk: Buktikan bahwa matriks tersebut merupakan *outer product* dari vektor posisi dalam persamaan terakhir.

11. Tunjukkan secara eksplisit bahwa

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}$$

dengan (a) menuliskan semua suku tak nol

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{lmn},$$

dan (b) mengekspansikan determinan

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}$$

pada elemen baris pertama.

12. Tunjukkan bahwa  $\varepsilon_{ijk}$  dapat dituliskan

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}.$$

Petunjuk: Buktikan bahwa determinan tersebut memiliki sifat yang sama dengan  $\varepsilon_{ijk}$ .

13. Buktikan

(a)  $\sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0;$

(b)  $\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il};$

(c)  $\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6.$

14. Persamaan berikut dituliskan dengan konvensi penjumlahan, buktikan

(a)  $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki} = 3,$

(b)  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mni} = \varepsilon_{jnl}.$

Petunjuk: (a) Ingat bahwa  $\delta_{ij}$  merupakan tensor substitusi, (b) Gunakan (2.60).

15. Dengan menggunakan konvensi penjumlahan, buktikan bahwa

(a)  $A_i \delta_{ij} = A_j$

(b)  $B_j \delta_{ij} = B_i$

(c)  $\delta_{1j} \delta_{j1} = 1$

(d)  $\delta_{ij} \delta_{ji} = \delta_{ii} = 3$

(e)  $\delta_{ij} \delta_{jl} = \delta_{il}$

16. Dengan subscript dan konvensi penjumlahan tunjukkan bahwa

(a)  $\partial_i x_j = \delta_{ij}$

(b)  $\partial_i (x_j x_j)^{1/2} = \frac{1}{(x_j x_j)^{1/2}} x_i.$

Petunjuk: (a)  $x_1, x_2, x_3$  merupakan variabel bebas. (b)  $\partial_i (x_j x_j) = 2x_j \partial_i x_j.$

17. Persamaan berikut dituliskan dengan konvensi penjumlahan

(a)  $\partial_i x_i = 3,$  (b)  $\partial_i (x_j x_j)^{1/2} = (x_j x_j)^{-1/2} x_i,$  nyatakan dalam notasi vektor biasa

Jawab: (a)  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3,$  (b)  $\nabla r = \mathbf{r}/r.$

18. Persamaan berikut dituliskan dengan konvensi penjumlahan

- (a)  $V_i A_j B_i \mathbf{e}_j$ ;      (b)  $c A_i B_j \delta_{ij}$ ;  
 (b)  $A_l B_j \varepsilon_{ijk} \delta_{li} \mathbf{e}_k$ ;    (d)  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} A_i B_j C_l D_m$ ,

nyatakan dalam notasi vektor biasa

Jawab : (a)  $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}$ ,    (b)  $c\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ,    (c)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ,    (d)  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ .

19. Gunakan teknik tensor Levi-Civita untuk membuktikan identitas berikut

- (a)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ ,  
 (b)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ .

20. Gunakan teknik tensor Levi-Civita untuk membuktikan identitas berikut

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{A}.$$

21. Misalkan

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Carilah bagian simetrik dan anti simetrik dari  $T_{ij}$ .

$$\text{Jawab : } S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 4 & 2.5 \\ 1.5 & 2.5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 \\ -1 & 0 & 2.5 \\ -1.5 & -2.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Jika  $S_{ij}$  tensor simetrik dan  $A_{ij}$  tensor anti simetrik buktikan bahwa

$$S_{ij} A_{ij} = 0.$$

23. Misalkan  $\varphi$  sebuah skalar,  $V_i$  sebuah pseudovektor,  $T_{ij}$  adalah tensor rank dua, dan misalkan

$$A_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \varphi, \quad B_{ij} = \varepsilon_{ijk} V_k, \quad C_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}.$$

Tunjukkan bahwa  $A_{ijk}$  adalah pseudotensor rank tiga,  $B_{ij}$  tensor rank dua dan  $C_i$  pseudovektor.

24. Carilah tensor strain untuk material isotropik elastik ketika dikenai

- (a) Sebuah deformasi tarikan  $\mathbf{u} = (0, 0, \alpha x_3)$   
 (b) Sebuah deformasi shear  $\mathbf{u} = (\beta x_3, 0, 0)$

$$\text{Jawab : (a) } E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# 3

## Transformasi Laplace

Di antara alat/tools yang sangat berguna untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode transformasi Laplace. Idenya adalah menggunakan sebuah integral untuk mentransformasikan persamaan diferensial menjadi sebuah persamaan aljabar, kemudian dari solusi persamaan aljabar ini kita memperoleh fungsi yang kita inginkan melalui transformasi invers. Transformasi Laplace dinamakan demikian karena ditemukan oleh matematikawan Perancis Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), yang juga dikenal untuk persamaan Laplace yang merupakan salah satu persamaan paling penting dalam fisika matematik.

Laplace pertama kali mempelajari metode ini pada 1782. Tetapi, kekuatan dan kegunaan metode ini tidak disadari sampai 100 tahun kemudian. Teknik dalam bab ini mengadopsi teknik Oliver Heaviside (1850 - 1925), seorang insyiner listrik Inggris yang inovatif, yang juga memberikan kontribusi signifikan dalam teori elektromagnetik.

Transformasi Laplace secara khusus berguna untuk menyelesaikan permasalahan dengan suku tak homogen dari sifat alami yang diskontinu atau impulsif. Persoalan ini biasa kita temui dalam ilmu fisika tetapi cukup sulit diselesaikan dengan metode persamaan diferensial biasa.

Dalam bab ini sifat-sifat tertentu dari transformasi Laplace dipelajari dan rumus-rumus yang relevan ditabulasikan sehingga solusi dari persoalan kondisi awal (*initial value problems*) yang melibatkan persamaan diferensial linier dapat dengan mudah diperoleh.

### 3.1 Definisi dan Sifat-sifat Transformasi Laplace

#### 3.1.1 Transformasi Laplace - Sebuah Operator Linier

Transformasi Laplace sebuah fungsi  $\mathcal{L}[f]$  sebuah fungsi  $f(t)$  didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s), \quad (3.1)$$

kita mengasumsikan bahwa integral ini ada. Salah satu alasan transformasi Laplace berguna adalah  $s$  dapat dipilih cukup besar sehingga (3.1) konvergen meskipun jika  $f(t)$  tidak mendekati nol ketika  $t \rightarrow \infty$ . Tentu, terdapat fungsi-fungsi yang divergen lebih cepat dibandingkan

$e^{st}$ . Untuk fungsi-fungsi tersebut, transformasi Laplace tidak ada. Untungnya fungsi-fungsi tersebut jarang dijumpai dalam fisika.

Perhatikan juga bahwa transformasinya adalah sebuah fungsi dari  $s$ . Transformasi fungsi yang kita kerjakan bukan hanya ada, tetapi juga bernilai nol ( $F(s) \rightarrow 0$ ) ketika  $s \rightarrow \infty$ .

Dari definisi, transformasi Laplace adalah operator linier yakni

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[af(t) + bg(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} [af(t) + bg(t)] dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= a\mathfrak{L}[f] + b\mathfrak{L}[g].\end{aligned}\tag{3.2}$$

Untuk sebuah fungsi sederhana transformasi Laplace dapat dengan mudah dilakukan. Sebagai contoh

$$\mathfrak{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}.\tag{3.3}$$

Kita juga bisa dengan mudah menghitung transformasi sebuah fungsi eksponensial

$$\mathfrak{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[ -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^{\infty}.$$

Sepanjang  $s > a$ , limit atas hilang dan limit bawah memberikan  $1/(s-a)$ . Sehingga

$$\mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}.\tag{3.4}$$

Dengan cara yang sama

$$\mathfrak{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}.\tag{3.5}$$

Dengan hubungan ini, transformasi Laplace fungsi hiperbolik berikut

$$\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at}), \quad \sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$$

dapat dengan mudah diperoleh. Karena transformasi Laplace linier

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[\cosh at] &= \frac{1}{2} \{ \mathfrak{L}[e^{at}] + \mathfrak{L}[e^{-at}] \} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Dengan cara serupa

$$\mathfrak{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2}.\tag{3.7}$$

Sekarang parameter  $a$  tidak harus berupa bilangan riil. Jika  $a$  berupa bilangan imajiner  $a = i\omega$ , kita akan mempunyai

$$\mathfrak{L}[e^{i\omega t}] = \frac{1}{s - i\omega}.$$

Karena

$$\frac{1}{s - i\omega} = \frac{1}{s - i\omega} \times \frac{s + i\omega}{s + i\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

dan

$$\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \mathcal{L}[\cos \omega t + i \sin \omega t] = \mathcal{L}[\cos \omega t] + i\mathcal{L}[\sin \omega t],$$

dengan menyamakan suku riil dengan suku riil dan suku imajiner dengan suku imajiner kita memiliki

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3.8)$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (3.9)$$

Definisi dari  $\mathcal{L}[\cos \omega t]$  jelas tetap

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt. \quad (3.10)$$

Dengan menggunakan integral parsial, kita dapat langsung menghitungnya

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt &= \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \cos \omega t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \omega \sin \omega t \, dt \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t \, dt \\ \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t \, dt &= \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \sin \omega t \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \omega \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt. \end{aligned}$$

Kombinasikan kedua persamaan ini

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt.$$

Pindahkan suku terakhir ke ruas kiri

$$\left( 1 + \frac{\omega^2}{s^2} \right) \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{s},$$

atau

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

yang sama dengan (3.8) seperti seharusnya.

Secara prinsip, transformasi Laplace dapat diperoleh secara langsung dengan menghitung integral. Tetapi, sangat sering diperoleh dengan lebih sederhana dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Laplace dibandingkan integral langsung, seperti pada contoh terakhir.

Transformasi Laplace memiliki banyak sifat menarik, yang menjadi alasan transformasi Laplace merupakan alat yang sangat berguna dalam analisis matematik. Sekarang kita akan membicarakan beberapa diantaranya dan akan menggunakannya untuk membangkitkan lebih banyak transformasi seperti ilustrasi.

### 3.1.2 Transformasi Laplace untuk Turunan

Transformasi Laplace untuk sebuah turunan adalah dengan definisi

$$\mathcal{L}[f'] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} df(t).$$

Jika kita misalkan  $u = e^{-st}$  dan  $dv = df(t)$ , maka  $du = -s e^{-st} dt$  dan  $v = f$ . Dengan integral parsial, kita memiliki  $u dv = d(uv) - v du$  sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_0^{\infty} \{d[e^{-st} f(t)] + f(t)s e^{-st} dt\} \\ &= [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + s\mathcal{L}[f]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Jelaslah

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''] &= \mathcal{L}[(f')'] = -f'(0) + s\mathcal{L}[f'] \\ &= -f'(0) + s(-f(0) + s\mathcal{L}[f]) = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathcal{L}[f]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Secara alami hasil ini dapat diperluas untuk orde yang lebih tinggi

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = -f^{(n-1)}(0) - \dots - s^{n-1}f(0) + s^n\mathcal{L}[f]. \quad (3.13)$$

Sifat ini sangat krusial dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Di sini kita akan menggunakannya untuk mendapatkan  $\mathcal{L}[t^n]$ .

Pertama, misalkan  $f(t) = t$ , maka  $f' = 1$  dan  $f(0) = 0$ . Dengan (3.11)

$$\mathcal{L}[1] = -0 + s\mathcal{L}[t],$$

jika kita tata ulang dan menggunakan (3.3), kita memiliki

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s^2}. \quad (3.14)$$

Jika kita misalkan  $f(t) = t^2$ , maka  $f' = 2t$  dan  $f(0) = 0$ . Kembali dengan (3.11)

$$\mathcal{L}[2t] = -0 + s\mathcal{L}[t^2].$$

Maka dengan (3.14)

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[2t] = \frac{2}{s}\mathcal{L}[t] = \frac{2}{s^3}. \quad (3.15)$$

Proses ini dapat kita ulang sehingga didapatkan

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (3.16)$$



### 3.1.3 Substitusi: Pergeseran $s$

Jika kita mengetahui transformasi Laplace  $F(s)$  dari sebuah fungsi  $f(t)$ , kita bisa mendapatkan transformasi dari  $e^{at}f(t)$  yaitu menggantikan  $s$  dengan  $s-a$  pada  $F(s)$ . Hal ini dapat dengan mudah dibuktikan. Dengan definisi

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathfrak{L}[f(t)],$$

jelastah

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \mathfrak{L}[e^{at}f(t)]. \quad (3.17)$$

Hubungan sederhana ini sering dikenal sebagai teorema pergeseran  $s$  (pergeseran pertama).

Dengan bantuan teorema pergeseran  $s$ , kita dapat menurunkan transformasi lebih banyak fungsi tanpa menghitung integralnya. Sebagai contoh, dari (3.16) dan (3.17) yaitu

$$\mathfrak{L}[e^{-at}t^n] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}. \quad (3.18)$$

Dapat juga dengan mudah ditunjukkan bahwa

$$\mathfrak{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} \cos \omega t dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} \cos \omega t dt. \quad (3.19)$$

Jika kita bandingkan (3.10) dengan (3.19) perbedaannya terletak pada  $s$  yang digantikan dengan  $s+a$ . Sehingga integral terakhir haruslah sama dengan ruas kanan dari (3.8) dengan  $s$  digantikan  $s+a$  yaitu

$$\mathfrak{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}. \quad (3.20)$$

Dengan cara yang sama

$$\mathfrak{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}. \quad (3.21)$$

### 3.1.4 Turunan sebuah Transformasi

Jika kita turunkan transformasi Laplace  $F(s)$  terhadap  $s$ , kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \mathfrak{L}[f(t)] = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{de^{-st}}{ds} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt = \mathfrak{L}[-tf(t)]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Jika kita teruskan proses ini, kita memiliki

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathfrak{L}[f(t)] = \mathfrak{L}[(-t)^n f(t)]. \quad (3.23)$$

Lebih banyak rumus dapat diturunkan dengan menggunakan hubungan ini. Sebagai contoh, jika kita turunkan kedua ruas (3.9) terhadap  $s$ , kita peroleh

$$\frac{d}{ds} \mathfrak{L}[\sin \omega t] = \frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Karena

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathfrak{L}[\sin \omega t] &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t \, dt = - \int_0^\infty t e^{-st} \sin \omega t \, dt = -\mathfrak{L}[t \sin \omega t] \\ \frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} &= -\frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}[t \sin \omega t] = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (3.24)$$

Dengan cara yang sama

$$\mathfrak{L}[t \cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (3.25)$$

### 3.1.5 Tabel Transformasi Laplace

Karena transformasi Laplace adalah operator linier, dua buah transformasi dapat dikombinasikan untuk membentuk yang baru. Misalnya

$$\mathfrak{L}[1 - \cos \omega t] = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} \quad (3.26)$$

$$\mathfrak{L}[\omega t - \sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)} \quad (3.27)$$

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t - \omega t \cos \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega(s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (3.28)$$

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t + \omega t \cos \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega(s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (3.29)$$

$$\mathfrak{L}[\cos at - \cos bt] = \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{s}{s^2 + b^2} = \frac{(b^2 - a^2)s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (3.30)$$

Terdapat tabel transformasi Laplace yang lengkap (sebagai contoh, F. Oberhersttinger and E. Badii, *Tables of Laplace Transforms*, Springer, New York, 1973). Tabel sederhananya diberikan pada Tabel 3.1. Transformasi yang ada di sebelah kiri sudah kita buktikan, sedangkan yang ada di sebelah kanan akan kita buktikan.

## 3.2 Solusi Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial dengan transformasi Laplace, kita menemui masalah invers dari menentukan fungsi  $f(t)$  yang tidak diketahui yang memiliki transformasi  $F(s)$ . Notasi  $\mathfrak{L}^{-1}[F(s)]$  biasanya digunakan untuk invers transformasi Laplace. Yaitu, jika

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt, \quad (3.31)$$

maka

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)]. \quad (3.32)$$

Tabel 3.1: Tabel ringkas transformasi Laplace, dalam tiap kasus  $s$  dianggap cukup besar sehingga transformasinya ada.

$f(t)$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$	$f(t)$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$	$\delta(t)$	1
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\delta(t - c)$	$e^{-sc}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\delta'(t - c)$	$s e^{-sc}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	$u(t - c)$	$\frac{1}{s} e^{-sc}$
$t e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^2}$	$(t - c)^n u(t - c)$	$\frac{n!}{s^{n+1}} e^{-sc}$
$t^n e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^{n+1}}$	$(t - c)^n e^{a(t-c)} u(t - c)$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}} e^{-sc}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega(t - c) u(t - c)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-sc}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cosh a(t - c) u(t - c)$	$\frac{s}{s^2 - a^2} e^{-sc}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sin \omega t$ periode $\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{s\pi}{2\omega}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$t$ periode $p$	$\frac{1 - (1 + ps)e^{-ps}}{ps^2(1 - e^{-ps})}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	$\ln \frac{s - a}{s - b}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cosh at)$	$\ln \frac{s^2 - a^2}{s^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$	$\ln \frac{s^2 - \omega^2}{s^2}$
$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\tan^{-1} \frac{\omega}{s}$
$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$t^a (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a + 1)}{s^{a+1}}$
$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
$\sin \omega t + \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t^{1/2}$	$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}$
$\cos at - \cos bt$	$\frac{(b^2 - a^2)s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$J_0(at)$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^{1/2}}$

Karena

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{L}[f(t)]] = I[f(t)]$$

mengikuti hal ini,  $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}$  adalah operator identitas  $I$ . Transformasi invers sangatlah penting dalam prakteknya dan terdapat berbagai cara untuk mendapatkannya. Dalam sub bab ini, pertama kita akan mempelajari transformasi dalam bentuk pembagian dua buah polinomial

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

dengan  $p(s)$  dan  $q(s)$  memiliki koefisien riil. Karena

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \rightarrow 0$$

jelaslah bahwa derajat  $p(s)$  lebih rendah dibandingkan  $q(s)$ . Terdapat beberapa metode untuk mendapatkan invers transformasi tersebut. Agar jelas, kita akan mempelajarinya terpisah.

### Inspeksi

Jika ekspresinya sederhana, kita dapat memperoleh invers langsung dari tabel. Hal ini bisa kita lihat dalam contoh berikut

**Contoh 3.2.1.** Carilah (a)  $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]$ ; (b)  $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+4)^3}\right]$ ; (c)  $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]$

**Solusi 3.2.1.**

(a) Karena

$$\mathfrak{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}, \quad t^3 = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right],$$

kita memiliki

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{1}{6}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = \frac{1}{6}t^3.$$

(b) Karena

$$\mathfrak{L}[e^{-4t}t^2] = \frac{2}{(s+4)^3}, \quad e^{-4t}t^2 = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+4)^3}\right],$$

sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{4}{(s+4)^3}\right] = 2\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+4)^3}\right] = 2e^{-4t}t^2.$$

(c) Karena

$$\mathfrak{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}, \quad \sin 2t = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right],$$

sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \frac{1}{2}\sin 2t.$$

**Contoh 3.2.2.** Carilah (a)  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right]$ ; (b)  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 5} \right]$

**Solusi 3.2.2.** (a) Pertama kita perhatikan bahwa

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(s + 1)^2 + 4}.$$

Karena

$$\mathcal{L} [e^{-t} \sin 2t] = \frac{2}{(s + 1)^2 + 4}, \quad e^{-t} \sin 2t = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} \right],$$

sehingga

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} \right] = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

(b) Ingat

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [e^{-t} \sin 2t] &= \frac{2}{(s + 1)^2 + 4}, \\ \mathcal{L} [e^{-t} \cos 2t] &= \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4}, \end{aligned}$$

sehingga kita dapat menuliskan

$$\frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{2(s + 1) - 1}{(s + 1)^2 + 4} = 2 \frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{(s + 1)^2 + 4}.$$

Maka

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 5} \right] &= 2 \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + 4} \right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} \right] \\ &= 2 \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L} [e^{-t} \cos 2t]] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L} [e^{-t} \sin 2t]] \\ &= 2e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t. \end{aligned}$$

### Dekomposisi Pecahan Parsial

Ambil pecahan parsial  $F(s)$  dan kemudian ambil invers masing-masing. Sangat mungkin pembaca sudah biasa dengan pecahan parsial. Kita akan menggunakan contoh berikut untuk mengingat ulang.

**Contoh 3.2.3.** Carilah  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \right]$ .

**Solusi 3.2.3.** Pertama kita perhatikan

$$\begin{aligned} \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} &= \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)} \\ &= \frac{a}{s - 2} + \frac{b}{s + 1} = \frac{a(s + 1) + b(s - 2)}{(s - 2)(s + 1)}. \end{aligned}$$

Berikut ini tiga buah cara berbeda untuk menentukan  $a$  dan  $b$

- Pertama perhatikan bahwa

$$s - 1 = a(s + 1) + b(s - 2)$$

harus berlaku untuk semua  $s$ . Ambil  $s = 2$  maka  $a = 1/3$ , dengan cara yang sama ambil  $s = -1$  maka  $b = 2/3$ .

- Cara lain adalah dengan mengumpulkan suku yang pangkat  $s$ -nya sama dan mensyaratkan koefisien suku yang berkaitan pada kedua ruas persamaan sama. Yaitu

$$s - 1 = (a + b)s + (a - 2b).$$

Hal ini berarti  $a + b = 1$  dan  $a - b = -1$ . Sehingga  $a = 1/3$  dan  $b = 2/3$ .

- Cara lain adalah dengan memperhatikan

$$\lim_{s \rightarrow 2} \left\{ (s - 2) \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)} \right\} = \lim_{s \rightarrow 2} \left\{ (s - 2) \left[ \frac{a}{(s - 2)} + \frac{b}{(s + 1)} \right] \right\},$$

hal ini berarti

$$\lim_{s \rightarrow 2} \left\{ \frac{s - 1}{(s + 1)} \right\} = \lim_{s \rightarrow 2} \left\{ a + (s - 2) \frac{b}{(s + 1)} \right\} = a.$$

Kita bisa melihat bahwa  $a = 1/3$ . Dengan cara yang sama

$$\lim_{s \rightarrow -1} \left\{ (s + 1) \frac{s - 1}{(s - 2)(s + 1)} \right\} = \lim_{s \rightarrow -1} \left\{ (s + 1) \left[ \frac{a}{(s - 2)} + b \right] \right\} = b$$

memberikan  $b = 2/3$ .

Dalam berbagai soal, salah satu cara lebih sederhana, tetapi untuk soal ini

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \right] &= \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{3} \frac{1}{(s - 2)} + \frac{2}{3} \frac{1}{(s + 1)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \mathfrak{L}^{-1} [\mathfrak{L} [e^{2t}]] + \frac{2}{3} \mathfrak{L}^{-1} [\mathfrak{L} [e^{-t}]] = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}. \end{aligned}$$

**Contoh 3.2.4.** Carilah  $\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 + 4)} \right]$ .

**Solusi 3.2.4.** Terdapat dua cara untuk mengambil pecahan parsial

- Jika kita gunakan akar kompleks

$$\frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s - 2i} + \frac{c}{s + 2i}.$$

Kalikan dengan  $s$  dan ambil limit untuk  $s \rightarrow 0$ , kita memiliki

$$a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{4}.$$

Kalikan dengan  $s - 2i$  dan ambil limit  $s \rightarrow 2i$ , kita memiliki

$$b = \lim_{s \rightarrow 2i} \frac{1}{s(s + 2i)} = -\frac{1}{8}.$$

Kalikan dengan  $s + 2i$  dan ambil limit  $s \rightarrow -2i$ , kita memiliki

$$c = \lim_{s \rightarrow -2i} \frac{1}{s(s-2i)} = -\frac{1}{8}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2+4)} \right] &= \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] - \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-2i} \right] - \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+2i} \right] \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} e^{2it} - \frac{1}{8} e^{-2it} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t. \end{aligned}$$

- Cara lain untuk mengambil pecahan parsial adalah dengan memperhatikan

$$\frac{b}{s-2i} + \frac{c}{s+2i} = \frac{b(s+2i) + c(s-2i)}{(s-2i)(s+2i)} = \frac{(b+c)s + 2i(b-c)}{s^2+4}.$$

Jika kita misalkan  $b+c = b'$  dan  $2i(b-c) = c'$ , maka

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{a}{s} + \frac{b's + c'}{s^2+4}.$$

Hal penting yang harus kita perhatikan adalah jika penyebutnya merupakan orde dua dari  $s$ , pembilangnya harus bisa berupa orde pertama dari  $s$ . Dengan kata lain, kita tidak mungkin mendapatkan jawaban yang benar jika suku  $b'$  hilang. Dengan pemahaman ini, pecahan parsialnya dapat diambil langsung sebagai

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s^2+4)} &= \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+4} = \frac{a(s^2+4) + (bs+c)}{s(s^2+4)} \\ &= \frac{as^2 + 4a + bs^2 + cs}{s(s^2+4)} = \frac{(a+b)s^2 + cs + 4a}{s(s^2+4)}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$1 = (a+b)s^2 + cs + 4a.$$

Koefisien  $s$  haruslah sama suku per suku. Hal ini berarti  $a+b=0$ ,  $c=0$ ,  $4a=1$ . Hal ini memberikan  $a=1/4$ ,  $b=-1/4$ ,  $c=0$ . Sehingga

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2+4)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2+4} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t.$$

**Contoh 3.2.5.** Carilah  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^3(s-1)} \right]$ .

**Solusi 3.2.5.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^3(s-1)} &= \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s^3} + \frac{d}{s-1} \\ &= \frac{as^2(s-1) + bs(s-1) + c(s-1) + ds^3}{s^3(s-1)} \\ &= \frac{(a+d)s^3 + (b-a)s^2 + (c-b)s - c}{s^3(s-1)}. \end{aligned}$$

Hal ini mengharuskan  $a + d = 0$ ,  $b - a = 0$ ,  $c - b = 0$ ,  $-c = 1$ . Sehingga  $c = -1$ ,  $b = -1$ ,  $a = -1$ ,  $d = 1$ . Maka

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s-1)}\right] &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{(s-1)}\right] \\ &= -1 - t - \frac{1}{2}t^2 + e^t.\end{aligned}$$

**Contoh 3.2.6.** Carilah  $\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}\right]$ .

**Solusi 3.2.6.**

$$\begin{aligned}\frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} &= \frac{2\omega}{[(s - i\omega)(s + i\omega)]^2} \\ &= \frac{a}{(s - i\omega)} + \frac{b}{(s - i\omega)^2} + \frac{c}{(s + i\omega)} + \frac{d}{(s + i\omega)^2}.\end{aligned}$$

Kalikan kedua ruas dengan  $(s - i\omega)^2$  dan dengan mengambil limit  $s \rightarrow i\omega$ , kita mempunyai

$$\lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ \frac{2\omega}{(s + i\omega)^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ (s - i\omega)a + b + \frac{(s - i\omega)^2 c}{(s + i\omega)} + \frac{(s - i\omega)^2 d}{(s + i\omega)^2} \right\}.$$

Jelaslah

$$b = \frac{2\omega}{(2i\omega)^2} = -\frac{1}{2\omega}.$$

Jika setelah mengalikan kedua ruas dengan  $(s - i\omega)^2$ , kita turunkan lebih dulu lalu ambil limit  $s \rightarrow i\omega$ , kita mempunyai

$$\lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ \frac{d}{ds} \frac{2\omega}{(s + i\omega)^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ a + \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s - i\omega)^2 c}{(s + i\omega)} + \frac{(s - i\omega)^2 d}{(s + i\omega)^2} \right] \right\}.$$

Kita mempunyai

$$a = \lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ \frac{-4\omega}{(s + i\omega)^3} \right\} = \frac{1}{2\omega^2 i}.$$

Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan

$$d = -\frac{1}{2\omega}, \quad c = -\frac{1}{2\omega^2 i}.$$

Sehingga kita memiliki

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}\right] &= \\ \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{2\omega^2 i} \frac{1}{(s - i\omega)} - \frac{1}{2\omega} \frac{1}{(s - i\omega)^2} - \frac{1}{2\omega^2 i} \frac{1}{(s + i\omega)} - \frac{1}{2\omega} \frac{1}{(s + i\omega)^2}\right] &= \\ \frac{1}{2\omega^2 i} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - i\omega)} - \frac{1}{(s + i\omega)}\right] - \frac{1}{2\omega} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s - i\omega)^2} - \frac{1}{(s + i\omega)^2}\right] &= \\ \frac{1}{2\omega^2 i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) - \frac{1}{2\omega} (t e^{i\omega t} + t e^{-i\omega t}) &= \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{1}{\omega} t \cos \omega t.\end{aligned}$$



### Ekspansi Heaviside

Ekspansi Heaviside secara esensial merupakan cara sistematis untuk mengambil pecahan parsial. Dalam pecahan parsial dekomposisi  $p(s)/q(s)$ , faktor tak berulang  $(s - a)$  dari  $q(s)$  memberikan sebuah pecahan dalam bentuk  $A/(s - a)$ . Sehingga  $F(s)$  dapat dituliskan sebagai

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A}{s - a} + G(s) \quad (3.33)$$

dengan  $G(s)$  adalah ekspresi sisanya. Perkalian dengan  $(s - a)$  memberikan

$$\frac{(s - a)p(s)}{q(s)} = A + (s - a)G(s).$$

Jika kita membiarkan  $s$  mendekati  $a$ , suku kedua di ruas kanan hilang, karena  $G(s)$  tidak memiliki faktor yang dapat menghilangkan  $(s - a)$ . Sehingga

$$A = \lim_{s \rightarrow a} \frac{(s - a)p(s)}{q(s)}. \quad (3.34)$$

Karena  $q(a) = 0$ , karena  $a$  merupakan akar tak berulang dari  $q(s) = 0$ , limit pada (3.34) merupakan bentuk tak hingga  $0/0$ . Dengan aturan L' Hospital, kita memiliki

$$A = \lim_{s \rightarrow a} \frac{p(s) + (s - a)p'(s)}{q'(s)} = \frac{p(a)}{q'(a)}. \quad (3.35)$$

Sehingga konstanta dalam dekomposisi pecahan parsial dapat dengan mudah ditentukan.

**Contoh 3.2.7.** Gunakan ekspansi Heaviside untuk mencari  $\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \right]$ .

**Solusi 3.2.7.** Akar dari  $s^2 - s - 2$  adalah  $s = 2$  dan  $s = -1$  dan  $\frac{d}{ds}(s^2 - s - 2) = 2s - 1$ . Sehingga

$$\frac{s - 1}{s^2 - s - 2} = \frac{a}{(s - 2)} + \frac{b}{(s + 1)}$$

$$a = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s - 1}{2s - 1} = \frac{1}{3}, \quad b = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s - 1}{2s - 1} = \frac{2}{3}.$$

Maka

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \right] = \frac{1}{3} \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - 2} \right] + \frac{2}{3} \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + 1} \right] = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}.$$

**Contoh 3.2.8.** Gunakan ekspansi Heaviside untuk mencari  $\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 5} \right]$ .

**Solusi 3.2.8.** Akar dari  $s^2 + 2s + 5$  adalah  $s = -1 \pm 2i$  dan  $\frac{d}{ds}(s^2 + 2s + 5) = 2s + 2$ . Sehingga

$$\frac{2s + 1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{a}{s - (-1 + 2i)} + \frac{b}{s - (-1 - 2i)}$$

$$a = \lim_{s \rightarrow -1 + 2i} \frac{2s + 1}{2s + 2} = 1 + \frac{i}{4}, \quad b = \lim_{s \rightarrow -1 - 2i} \frac{2s + 1}{2s + 2} = 1 - \frac{i}{4}.$$

Maka

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{2s+1}{s^2+2s+5} \right] \\ = \left( 1 + \frac{1}{4}i \right) \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - (-1+2i)} \right] + \left( 1 - \frac{1}{4}i \right) \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - (-1-2i)} \right]. \end{aligned}$$

Ingat kembali

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-c} \right] = e^{ct},$$

kita mempunyai

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - (-1+2i)} \right] = e^{(-1+2i)t} = e^{-t} e^{i2t} = e^{-t} (\cos 2t + i \sin 2t),$$

dan

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - (-1-2i)} \right] = e^{(-1-2i)t} = e^{-t} e^{-i2t} = e^{-t} (\cos 2t - i \sin 2t).$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{2s+1}{s^2+2s+5} \right] &= \left( 1 + \frac{1}{4}i \right) e^{-t} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &\quad + \left( 1 - \frac{1}{4}i \right) e^{-t} (\cos 2t - i \sin 2t) \\ &= 2e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t. \end{aligned}$$

Secara umum, jika  $q(s)$  adalah sebuah polinomial dengan akar tak berulang, ekspansi Heaviside adalah cara paling efektif dalam dekomposisi pecahan parsial. Jika  $q(s)$  sudah berbentuk perkalian faktor  $(s - a_1)(s - a_2) \cdots (s - a_n)$ , maka metode lain bisa sama atau lebih efektif. Dalam sebarang kasus, jika akar kompleks digunakan, berguna untuk diingat jika fungsi asalnya riil, hasil akhirnya juga harus riil. Jika terdapat suku imajiner dalam hasil akhir, maka pasti ada langkah yang salah.

Jika  $q(s)$  memiliki akar berulang, kita dapat menuliskannya sebagai

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(s-a)}.$$

Dengan argumen yang sama kita dapat menuliskan

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \left[ \frac{(s-a)^m p(s)}{q(s)} \right], \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.36)$$

Sayangnya, dalam praktek rumus ini tidak selalu lebih sederhana dibandingkan dengan metode pecahan parsial lainnya, seperti pada Contoh 3.2.6. Faktanya, persoalan yang kita jumpai di alam paling baik diselesaikan dengan turunan transformasinya.

### Menggunakan Turunan Transformasi

Dalam Contoh 3.2.6, kita menggunakan pecahan parsial untuk mencari  $\mathcal{L}^{-1}[1/(s^2 + a^2)^2]$ . Cara lebih sederhana untuk menangani persoalan ini adalah dengan menggunakan sifat-sifat turunan. Prosedur ini bisa kita lihat dalam contoh berikut.

**Contoh 3.2.9.** Carilah (a)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right]$ , (b)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}\right]$ ,  
 (c)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}\right]$ , (d)  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2}\right]$ .

**Solusi 3.2.9.** (a) Dengan mengambil turunan

$$\frac{d}{da} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2},$$

kita dapat menuliskan

$$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{d}{da} \frac{a}{s^2 + a^2} \right).$$

Karena

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{2a^2} \left( \frac{1}{a} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{d}{da} \mathcal{L}[\sin at] \right) \\ &= \frac{1}{2a^3} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{1}{2a^2} \frac{d}{da} \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt \\ &= \frac{1}{2a^3} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{1}{2a^2} \int_0^\infty e^{-st} t \cos at \, dt \\ &= \frac{1}{2a^3} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{1}{2a^2} \mathcal{L}[t \cos at]. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2a^3} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{1}{2a^2} \mathcal{L}[t \cos at]\right] \\ &= \frac{1}{2a^3} \sin at - \frac{1}{2a^2} t \cos at. \end{aligned}$$

(b) Ambil turunan terhadap  $s$

$$\frac{d}{ds} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{-2as}{(s^2 + a^2)^2},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} &= -\frac{1}{2a} \frac{d}{ds} \frac{a}{s^2 + a^2} = -\frac{1}{2a} \frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin at] \\ &= -\frac{1}{2a} \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt = \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-st} t \sin at \, dt \\ &= \frac{1}{2a} \mathcal{L}[t \sin at]. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{2a} \mathcal{L}[t \sin at] \right] = \frac{1}{2a} t \sin at.$$

(c) Mengikuti hasil (b)

$$s \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2a} t \sin at \right] = s \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Ingat

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df}{dt} \right] = s \mathcal{L}[f] - f(0); \quad s \mathcal{L}[f] = \mathcal{L} \left[ \frac{df}{dt} \right] + f(0).$$

Misalkan  $f = \frac{1}{2a} t \sin at$ , sehingga  $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at$ ;  $f(0) = 0$ , kita memiliki

$$s \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2a} t \sin at \right] = \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at \right].$$

Sehingga

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ s \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2a} t \sin at \right] \right] = \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at.$$

(d) Dari hasil (c)

$$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2} = s \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2} = s \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at \right].$$

Sekarang, misalkan

$$f = \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at, \quad \text{sehingga} \quad \frac{df}{dt} = \cos at - \frac{a}{2} t \sin at; \quad f(0) = 0,$$

sehingga

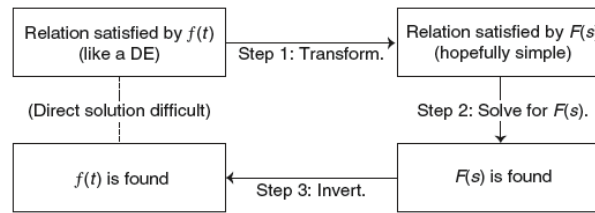
$$s \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at \right] = \mathcal{L} \left[ \cos at - \frac{a}{2} t \sin at \right],$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \mathcal{L} \left[ \cos at - \frac{a}{2} t \sin at \right] \right] = \cos at - \frac{a}{2} t \sin at.$$

### 3.2.1 Menyelesaikan Persamaan Diferensial

Ide menggunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial dinyatakan pada Gambar 3.1. Anggap kita memiliki sebuah persamaan diferensial dengan fungsi yang tidak diketahui adalah  $f(t)$ . Langkah pertama adalah menggunakan transformasi Laplace pada persamaan diferensial ini. Hasilnya adalah hubungan  $F(s) = \mathcal{L}[f]$ . Secara umum, ini adalah persamaan aljabar. Langkah kedua adalah dengan mencari  $F(s)$  dengan menyelesaikan persamaan aljabar ini. Langkah ketiga dan terakhir adalah mencari fungsi yang tidak diketahui  $f(t)$  dengan mengambil invers dari transformasi Laplace  $F(s)$

Beberapa contoh berikut akan membuat hal ini jelas.



Gambar 3.1: Langkah menggunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial.

**Contoh 3.2.10.** Carilah solusi persamaan diferensial

$$y'' + y = \sin 2t,$$

yang memenuhi kondisi awal

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**Solusi 3.2.10.** Dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan

$$\mathcal{L}[y'' + y] = \mathcal{L}[\sin 2t],$$

kita memiliki

$$s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Dengan kondisi awal  $y(0)$  dan  $y'(0)$ , persamaan ini dapat dituliskan

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}[y] = 1 + \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Persamaan aljabar ini dapat dengan mudah diselesaikan

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Sehingga

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \right].$$

Menggunakan metode pada subbab terakhir, kita mempunyai

$$y(t) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t.$$

**Contoh 3.2.11.** Carilah solusi persamaan diferensial

$$y'' + 4y = \sin 2t, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$$

**Solusi 3.2.11.** Dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan

$$\mathcal{L}[y'' + 4y] = \mathcal{L}[\sin 2t],$$

kita memiliki

$$s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Dengan kondisi awal  $y(0)$  dan  $y'(0)$ , persamaan ini dapat dituliskan

$$(s^2 + 4)\mathcal{L}[y] = 10s + \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Sehingga

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{10s}{(s^2 + 4)} + \frac{2}{(s^2 + 4)^2} \right].$$

Diperoleh solusinya

$$y = 10 \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t.$$

**Contoh 3.2.12.** Carilah solusi persamaan diferensial

$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

**Solusi 3.2.12.** Dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan

$$\mathcal{L}[y'' + 4y' + 4y] = \mathcal{L}[t^2 e^{-2t}].$$

Dengan kondisi awal  $y(0) = 0$  dan  $y'(0) = 0$ , kita mempunyai

$$s^2 \mathcal{L}[y] + 4s \mathcal{L}[y] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{2}{(s + 2)^3}.$$

Kumpulkan sukunya

$$(s^2 + 4s + 4)\mathcal{L}[y] = (s + 2)^2 \mathcal{L}[y] = \frac{2}{(s + 2)^3}$$

atau

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2}{(s + 2)^5}.$$

Solusinya adalah transformasi invers

$$y = \frac{2}{4!} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{4!}{(s + 2)^5} \right] = \frac{1}{12} t^4 e^{-2t}.$$

**Contoh 3.2.13.** Carilah solusi persamaan diferensial

$$y' - 2y + z = 0,$$

$$z' - y - 2z = 0,$$

memenuhi kondisi awal

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$$

**Solusi 3.2.13.** Dengan menggunakan transformasi Laplace pada masing-masing persamaan

$$\mathcal{L}[y' - 2y + z] = \mathcal{L}[0],$$

$$\mathcal{L}[z' - y - 2z] = \mathcal{L}[0],$$

kita memperoleh

$$s\mathcal{L}[y] - y(0) - 2\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[z] = 0,$$

$$s\mathcal{L}[z] - z(0) - \mathcal{L}[y] - 2\mathcal{L}[z] = 0.$$

Setelah menggantikan kondisi awal dan mengumpulkan suku-sukunya, kita peroleh

$$(s - 2)\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[z] = 0,$$

$$\mathcal{L}[y] - (s - 2)\mathcal{L}[z] = 0.$$

Persamaan aljabar ini dapat dengan mudah diselesaikan untuk memperoleh

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 1},$$

$$\mathcal{L}[z] = \frac{1}{(s - 2)^2 + 1}.$$

Sehingga

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 1} \right] = e^{2t} \cos t,$$

$$z = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s - 2)^2 + 1} \right] = e^{2t} \sin t.$$

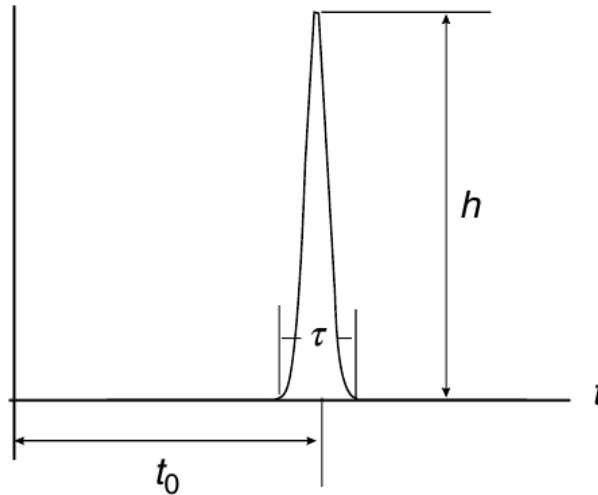
### 3.3 Transformasi Laplace Fungsi Impulsif dan Fungsi Tangga

Beberapa aplikasi yang paling berguna dan menarik dari metode transformasi Laplace muncul pada solusi persamaan diferensial linier dengan diskontinuitas atau fungsi tak homogen impulsif. Persamaan jenis ini sering kita jumpai dalam analisis arus dalam sirkuit listrik atau getaran sistem mekanik, ketika tegangan ataupun gaya memiliki magnitudo yang besar dalam waktu yang pendek.

Agar kita bisa secara efektif menggunakan fungsi dengan lompatan diskontinu, pertama kita harus memperkenalkan dua buah fungsi yang dinamakan fungsi delta dan fungsi tangga.

#### 3.3.1 Fungsi Delta Dirac

Fungsi delta,  $\delta(t)$ , pertama kali diusulkan pada tahun 1930 dalam pengembangan formalisme matematik mekanika kuantum. Dirac mensyaratkan sebuah fungsi yang nol di setiap titik, kecuali pada satu titik, yaitu fungsi yang diskontinu dan berperilaku seperti paku yang tinggi



Gambar 3.2: Sebuah fungsi berpuncak tajam. Jika  $h \rightarrow \infty$  dan  $\tau \rightarrow 0$  sedemikian rupa sehingga luas di bawah kurva sama dengan satu, maka fungsi ini menjadi fungsi delta  $\delta(t - t_0)$ .

dan sempit dari satuan luas. Matematikawan cepat bereaksi dalam hal ini dan mengatakan tidak terdapat fungsi yang memiliki sifat seperti ini. Tetapi Dirac menganggap ada, dan terus menggunakan fungsi ini sangat sukses dan akhirnya terbentuklah cabang matematik baru untuk membenarkan hal ini. Bagian matematik yang mempelajari ini dinamakan teori distribusi atau fungsi general. Meskipun baik untuk mengetahui dasar matematik fungsi delta terbangun secara rinci, untuk aplikasi dalam ilmu fisika kita hanya memerlukan definisi operasionalnya saja.

### Definisi Fungsi $\delta$

. Fungsi delta adalah fungsi memuncak yang sangat tajam didefinisikan sebagai

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \end{cases}, \quad (3.37)$$

tetapi integral yang melibatkan  $\delta(t - t_0)$  ternormalisasi pada satu satuan yaitu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (3.38)$$

Jelas bahwa limit  $-\infty$  dan  $\infty$  dapat digantikan dengan  $t_0 - \epsilon$  dan  $t_0 + \epsilon$  sepanjang  $\epsilon > 0$ , karena  $\delta(t - t_0)$  sama dengan 0 untuk  $t \neq t_0$ . Kita dapat memikirkannya sebagai fungsi yang sangat tinggi dan sempit seperti pada Gambar 3.2, dengan  $h \rightarrow \infty$  dan  $\tau \rightarrow 0$  sedemikian rupa sehingga luas di bawah kurva sama dengan satu.

Secara matematik, fungsi  $\delta$  didefinisikan dengan bagaimana perilaku fungsi ini di dalam integral. Sebenarnya yang dilakukan Dirac pertama kali dengan fungsi delta ini adalah



integrasi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt,$$

dengan  $f(t)$  sebuah fungsi kontinu. Integral ini dapat dihitung dengan argumen berikut. Karena  $\delta(t-t_0)$  nol untuk  $t \neq t_0$ , batas integrasi dapat dirubah menjadi  $t_0 - \epsilon$  dan  $t_0 + \epsilon$  dengan  $\epsilon$  adalah sebuah bilangan kecil positif. Selanjutnya karena  $f(x)$  kontinu pada  $t = t_0$ , nilainya pada interval  $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$  tidak akan berbeda terlalu jauh dengan  $f(t_0)$ , sehingga kita bisa mengatakan, kira-kira, bahwa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t)\delta(t-t_0) dt \approx f(t_0) \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0) dt$$

dengan aproksimasi meningkat ketika  $\epsilon$  mendekati nol. Tetapi,

$$\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0) dt = 1,$$

untuk semua nilai  $\epsilon$ . Jika  $\epsilon \rightarrow 0$ , kita memiliki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0). \quad (3.39)$$

Integral ini kadang dinamakan dengan sifat pergeseran fungsi delta:  $\delta(t-t_0)$  berperilaku sebagai penyaring, menyeleksi semua nilai dari  $f(t)$  nilainya pada titik  $t = t_0$ .

### Fungsi Delta dengan Argumen Rumit

Secara umum argumen fungsi delta dapat berupa fungsi sebarang dengan variabel bebas. Sehingga fungsi tersebut dapat selalu dituliskan sebagai jumlah fungsi delta dari argumen sederhana. Berikut adalah beberapa contohnya.

- $\delta(-t)$

Misalkan  $t' = -t$  maka  $dt' = -dt$ , kita dapat menuliskan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(-t) dt = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(-t')\delta(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t')\delta(t') dt' = f(0).$$

Karena

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0),$$

maka

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (3.40)$$

hubungan ini jelas dengan sendirinya.

- $\delta(at)$

Misalkan  $t' = at$  maka  $dt = dt'/a$ , Sehingga jika  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(at) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')\frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t') dt' \\ &= \frac{1}{a} f\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{a} f(0).\end{aligned}$$

Karena

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{a}\delta(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) dt = \frac{1}{a} f(0)$$

maka

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t).$$

Karena

$$\delta(-at) = \delta(at),$$

kita dapat menuliskan

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t). \quad (3.41)$$

- $\delta(t^2 - a^2)$

Argumen fungsi ini menuju nol ketika  $t = a$  dan  $t = -a$ , yang kelihatannya mengimplikasikan dua buah fungsi  $\delta$ . Kontribusi pada integralnya

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta[(t-a)(t+a)] dt,$$

hanya pada nilai nol dari argumen fungsi delta. Yaitu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt = \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt.$$

Di dekat dua buah nilai nol,  $t^2 - a^2$  dapat diaproksimasi

$$t^2 - a^2 = (t-a)(t+a) = \begin{cases} (-2a)(t+a) & t \rightarrow -a \\ (+2a)(t-a) & t \rightarrow +a \end{cases}.$$

Dalam limit  $\epsilon \rightarrow 0$ , integralnya menjadi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt &= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(t)\delta((-2a)(t+a)) dt \\ &+ \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(2a)(t-a) dt = \frac{1}{|2a|} \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(t)\delta(t+a) dt \\ &+ \frac{1}{|2a|} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t-a) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{|2a|} [\delta(t+a) + \delta(t-a)] dt.\end{aligned}$$

Sehingga

$$\delta(t^2 - a^2) = \frac{1}{|2a|} [\delta(t+a) + \delta(t-a)]. \quad (3.42)$$

### Transformasi Laplace Fungsi Delta dan Turunannya

. Mengikuti definisi transformasi Laplace dan fungsi delta, transformasi Laplace fungsi delta diberikan oleh

$$\mathfrak{L}[\delta(t-a)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t-a) dt = e^{-sa}. \quad (3.43)$$

Transformasi Laplace turunan fungsi delta dapat dihitung dengan integral parsial

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[\delta'(t-a)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} \delta(t-a) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} d(\delta(t-a)) \\ &= [e^{-st} \delta(t-a)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \delta(t-a) \frac{d}{dt} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Karena  $\delta(t-a)$  hilang di semua tempat kecuali pada  $t = a$ , pada batas atas dan bawah, suku yang diintegrasikan nilainya nol. Sehingga

$$\mathfrak{L}[\delta'(t-a)] = s \int_0^{\infty} \delta(t-a) e^{-st} dt = s e^{-sa}. \quad (3.44)$$

Rumus ini sangat berguna ketika kita menemui fenomena alam yang impulsif.

### 3.3.2 Fungsi Tangga Heaviside

#### Definisi Fungsi Tangga

Fungsi tangga satuan Heaviside  $u(t-c)$  dapat didefinisikan dari integrasi fungsi delta  $\delta(t'-c)$

$$u(t-c) = \int_{-\infty}^t \delta(t'-c) dt'. \quad (3.45)$$

Fungsi delta secara identik bernilai nol jika  $t' < c$ . Batas atas variabel  $t'$  adalah  $t$ . Jika  $t$  kurang dari  $c$ , maka semua  $t'$  akan kurang dari  $c$ . Integralnya sama dengan nol. Jika  $t$  lebih besar dari  $c$  maka integralnya sama dengan satu dengan definisi fungsi delta. Sehingga

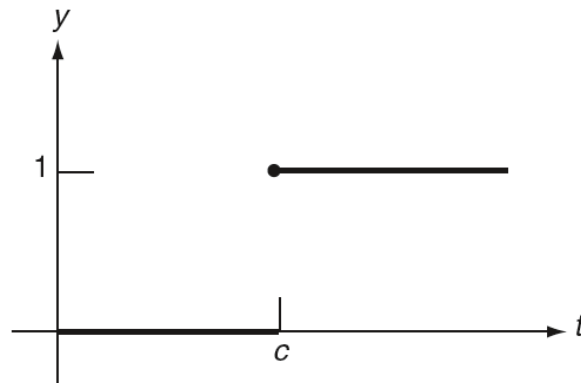
$$u(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t > c \end{cases}. \quad (3.46)$$

Fungsi tangga dapat didefinisikan langsung dari (3.46) tanpa melihat (3.45). Tetapi dengan (3.45) jelas terlihat bahwa

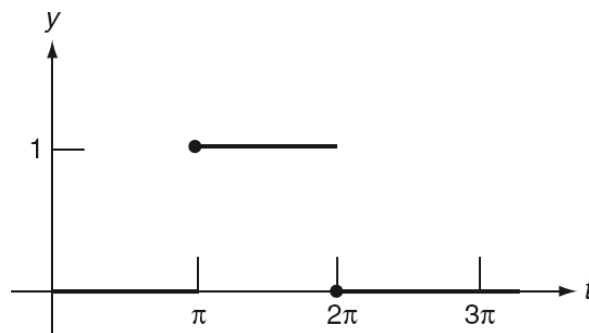
$$\frac{d}{dt} u(t-c) = \delta(t-c). \quad (3.47)$$

Gambar dari fungsi tangga satuan Heaviside  $y = u(t-c)$  ditunjukkan pada Gambar 3.3. Menarik, fungsinya tidak diberikan nama karena berat sebelah, tetapi, dari Oliver Heaviside insinyur Inggris. Biasanya fungsi ini secara sederhana dinamakan fungsi tangga.

Kita sering berurusan dengan sebuah pulsa berdurasi terbatas. Fungsi tangga ini sangat sesuai dalam situasi tersebut. Sebagai contoh, pulsa persegi



Gambar 3.3: Fungsi tangga satuan Heaviside

Gambar 3.4: Impuls persegi  $u(t - \pi) - u(t - 2\pi)$ .

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \pi \\ 1 & \pi < t < 2\pi \\ 0 & 2\pi < t < \infty \end{cases}$$

dapat dinyatakan sebagai

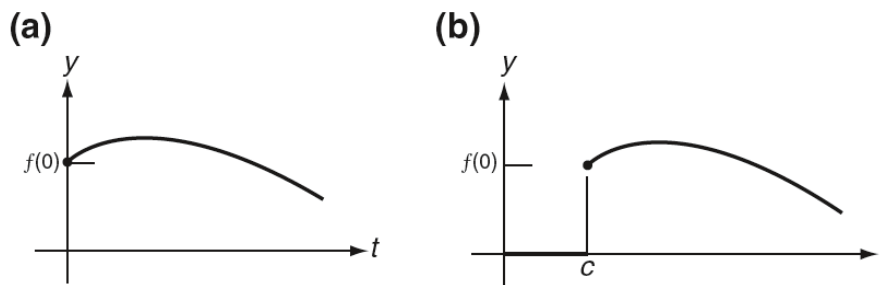
$$y(t) = u(t - \pi) - u(t - 2\pi).$$

Sketsa fungsi ini bisa dilihat pada Gambar 3.4.

### Operasi Pergeseran

Dalam beberapa persoalan sebuah sistem yang aktif pada  $t = 0$  karena adanya gangguan awal, setelah itu berperilaku karena gangguan lain yang mulai pada waktu yang lebih akhir  $t = c$ . Dalam situasi ini, deskripsi analitik diberikan oleh fungsi

$$y = f(t - c)u(t - c)$$



Gambar 3.5: Translasi sebuah fungsi (a)  $y = f(t)$ ; (b)  $y = f(t - c)u(t - c)$ .

yang merepresentasikan operasi pergeseran. Pertama  $f(t - c)$  merepresentasikan translasi  $f(t)$  sebesar  $c$  ke arah positif  $t$ . Mengalikan dengan  $u(t - c)$  memberikan efek memotong atau menghilangkan semuanya di sebelah kiri  $c$ . Hal ini terlihat pada Gambar 3.5.

### Transformasi Laplace Melibatkan Fungsi Tangga

Transformasi Laplace fungsi tangga dengan mudah ditentukan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t - c)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t - c) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} e^{-sc}.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Fungsi tangga ini secara khusus penting dalam teori transformasi karena hubungan antara transformasi  $f(t)$  dengan translasinya  $y = f(t - c)u(t - c)$  sebagai berikut.

$$\mathcal{L}[f(t - c)u(t - c)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t - c)u(t - c) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} f(t - c) dt.$$

Jika kita ganti variabel  $t' = t - c$

$$\begin{aligned}\int_c^{\infty} e^{-st} f(t - c) dt &= \int_0^{\infty} e^{-s(t'+c)} f(t') dt' = e^{-sc} \int_0^{\infty} e^{-st'} f(t') dt' \\ &= e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)].\end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathcal{L}[f(t - c)u(t - c)] = e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)].\quad (3.49)$$

Inversnya juga penting untuk diperhatikan

$$f(t - c)u(t - c) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)]].\quad (3.50)$$

Hubungan ini dikenal sebagai teorema pergeseran- $t$  (pergeseran kedua).

## 3.4 Persamaan Diferensial dengan Fungsi Gaya Diskontinu

Dalam subbab ini kita sekarang memperhatikan beberapa contoh pada suku tak homogen, atau fungsi gaya, yang diskontinu

Kita mulai dengan kasus paling sederhana. Sebuah partikel dengan massa  $m$  mula-mula diam kemudian digerakkan oleh ledakan yang tiba-tiba pada  $t = t_0$ . Dengan asumsi tanpa gesekan, kita berharap mencari posisi sebagai fungsi waktu. Kejadian sehari-hari yang terasa “aneh” untuk matematika “biasa”. Tetapi dengan transformasi Laplace dan fungsi delta maka hal ini menjadi sangat mudah.

Dalam persamaan dinamika Newton

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F, \quad (3.51)$$

marilah kita nyatakan gaya oleh ledakan tiba-tiba dengan fungsi delta

$$F = P\delta(t - t_0). \quad (3.52)$$

Kondisi awalnya adalah

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \quad (3.53)$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan diferensial

$$\mathfrak{L}[mx''] = \mathfrak{L}[P\delta(t - t_0)], \quad (3.54)$$

kita memperoleh

$$ms^2 \mathfrak{L}[x] = P e^{-st_0}. \quad (3.55)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{P}{m} \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-st_0}}{s^2} \right] = \frac{P}{m} \mathfrak{L}^{-1} [e^{-st_0} \mathfrak{L}[t]] \\ &= \frac{P}{m} (t - t_0) u(t - t_0). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Hal ini berarti

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{P}{m}(t - t_0) & t > t_0 \end{cases}. \quad (3.57)$$

Hasil ini mengatakan bahwa partikel akan diam hingga  $t_0$ , setelah itu jarak akan naik linier dengan waktu. Kecepatan partikel diberikan oleh

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{P}{m}, \quad (3.58)$$

yang konstan. Faktanya kita melihat bahwa amplitudo  $P$  fungsi delta sama dengan  $mv$  yang merupakan momentum. Hal ini menunjukkan bahwa yang dilakukan ledakan tiba-tiba adalah untuk memberikan momentum  $P$  kepada partikel. Momentum ini tetap pada partikel setelahnya.

---



---

**Contoh 3.4.1.** Marilah kita perhatikan osilator harmonik terpaksa dan teredam. Massa  $m$  dipaksa oleh gaya  $F(t)$ . Osilator ini juga mengalami gaya pegas  $-kx(t)$  dan gaya gesek  $-bx'(t)$  yang selesai dengan kecepatannya. Persamaan diferensial mendeskripsikan gerak ini

$$mx'' + bx' + kx = F(t).$$

Jika mula-mula diam

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

dan fungsi gayanya merupakan sebuah impuls ideal pada  $t_0$ , yaitu

$$F(t) = P_0\delta(t - t_0),$$

carilah perpindahan  $x$  sebagai fungsi waktu  $t$ .

**Solusi 3.4.1.** Jika kita lakukan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan

$$\mathfrak{L}\left[x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x\right] = \frac{P_0}{m}\mathfrak{L}[\delta(t - t_0)]$$

diperoleh

$$s^2\mathfrak{L}[x] + \frac{b}{m}s\mathfrak{L}[x] + \frac{k}{m}\mathfrak{L}[x] = \frac{P_0}{m}e^{-st_0}.$$

Maka

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{P_0}{m} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} e^{-st_0}.$$

Marilah kita tuliskan

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} &= s^2 + \frac{b}{m}s + \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m} \\ &= \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2, \end{aligned}$$

dan menyederhanakan notasi

$$\alpha = \frac{b}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2,$$

sehingga kita memiliki

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{P_0}{m\omega} \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} e^{-st_0}.$$

Tiga buah kasus muncul di sini

(a) Kasus osilasi,  $\omega^2 > 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{P_0}{m\omega} \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} e^{-st_0}\right] = \frac{P_0}{m\omega} \mathfrak{L}^{-1}\left[e^{-st_0} \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}\right] \\ &= \frac{P_0}{m\omega} \mathfrak{L}^{-1}\left[e^{-st_0} \mathfrak{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t]\right] = \frac{P_0}{m\omega} e^{-\alpha(t-t_0)} \sin \omega(t - t_0) u(t - t_0). \end{aligned}$$

(b) Kasus *over damped*  $\omega^2 < 0$ . Misalkan  $\beta^2 = -\omega^2$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{P_0}{m\beta} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 - \beta^2} e^{-st_0}\right] = \frac{P_0}{m\beta} \mathfrak{L}^{-1}\left[e^{-st_0} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 - \beta^2}\right] \\ &= \frac{P_0}{m\beta} \mathfrak{L}^{-1}\left[e^{-st_0} \mathfrak{L}[e^{-\alpha t} \sinh \beta t]\right] = \frac{P_0}{m\beta} e^{-\alpha(t-t_0)} \sinh \beta(t - t_0) u(t - t_0). \end{aligned}$$

(c) Kasus teredam kritis  $\omega^2 = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{P_0}{m} \frac{1}{(s + \alpha)^2} e^{-st_0} \right] = \frac{P_0}{m} \mathfrak{L}^{-1} \left[ e^{-st_0} \frac{1}{(s + \alpha)^2} \right] \\ &= \frac{P_0}{m} \mathfrak{L}^{-1} [e^{-st_0} \mathfrak{L}[e^{-\alpha t} t]] = \frac{P_0}{m} e^{-\alpha(t-t_0)} (t - t_0) u(t - t_0). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dalam semua kasus,  $x(t)$  sama dengan nol sebelum  $t = t_0$ , seperti yang kita harapkan, karena sistem tidak dapat merespon sampai pulsanya muncul. Perilaku seperti ini sering dinamakan sebagai kausal (sebab-akibat). Kausalitas, merupakan solusi karakteristik yang melibatkan waktu, mengharuskan tidak boleh adanya respon sebelum aplikasi sebuah gaya.

Menarik untuk memperhatikan bahwa persamaan Newton invarian di bawah transformasi  $t \rightarrow -t$ . Maka jelas kausalitas tidak diimplikasi oleh persamaan Newton. Kausalitas yang ditunjukkan di sini merupakan hasil dari definisi dari transformasi Laplace. Kenyataannya adalah syarat fisik ini dibangun dalam transformasi Laplace merupakan alasan bahwa metode ini berguna.

**Contoh 3.4.2.** Sebuah massa  $m = 1$  disambungkan dengan sebuah pegas dengan konstanta  $k = 4$  dan tanpa ada gesekan,  $b = 0$ . Massa dilepaskan dari keadaan diam dengan  $x(0) = 3$ . Pada  $t = 2\pi$  massa tersebut dipukul dengan palu, yang menyebabkan  $P_0 = 8$ . Tentukan gerak massa.

**Solusi 3.4.2.** Kita perlu menyelesaikan persoalan kondisi awal

$$x'' + 4x = 8\delta(t - 2\pi); \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 0.$$

Lakukan transformasi Laplace untuk memperoleh

$$s^2 \mathfrak{L}[x] - 3s + 4\mathfrak{L}[x] = 8e^{-2\pi s},$$

sehingga

$$(s^2 + 4)\mathfrak{L}[x] = 3s + 8e^{-2\pi s}.$$

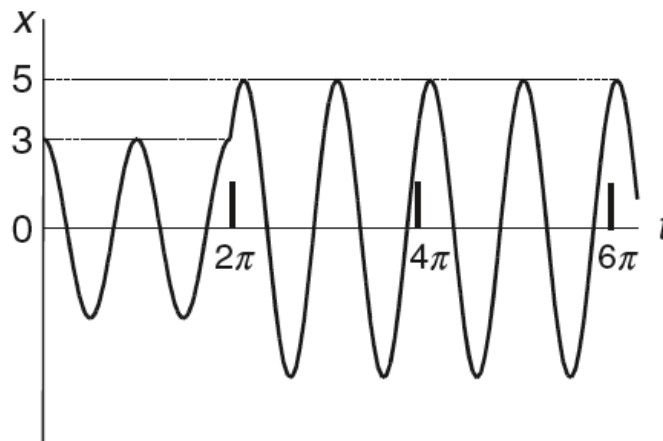
Maka

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{3s}{(s^2 + 4)} + \frac{8e^{-2\pi s}}{(s^2 + 4)}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{3s}{s^2 + 4} \right] + \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{8e^{-2\pi s}}{s^2 + 4} \right] = 3\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + 4} \right] + 4\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{2e^{-2\pi s}}{s^2 + 4} \right] \\ &= 3\mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{L}[\cos 2t]] + 4\mathfrak{L}^{-1}[e^{-2\pi s} \mathfrak{L}[\sin 2t]] \\ &= 3 \cos 2t + 4 \sin 2(t - 2\pi) u(t - 2\pi) \end{aligned}$$





Gambar 3.6: Plot dari  $x(t) = 3 \cos 2t + 4 \sin 2(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$ .

atau

$$x(t) = \begin{cases} 3 \cos 2t & t < 2\pi \\ 3 \cos 2t + 4 \sin 2(t - 2\pi) & t > 2\pi \end{cases}.$$

Karena  $3 \cos 2t + 4 \sin 2t = 5 \cos(2t - \theta)$  dan  $\theta = \tan^{-1}(4/3)$ , kita melihat efek dari impuls pada  $t = 2\pi$ . Hal ini menyebabkan amplitudo osilasi naik dari 3 ke 5 secara tiba-tiba. Meskipun frekuensinya tetap sama, terdapat diskontinuitas pada kecepatan. Plot dari  $x(t)$  pada Gambar 3.6.

**Contoh 3.4.3.** Perhatikan rangkaian RLC pada Gambar 3.7 dengan  $R = 110 \Omega$ ,  $L = 1$  H dan  $C = 0.001$  F, dan baterainya memiliki GGL 90 V. Awalnya tidak terdapat arus pada sirkuit dan tidak ada muatan pada kapasitor. Pada  $t = 0$  saklar ditutup dan pada  $t = T$ , ( $T = 1$ ) s baterai dilepaskan dari sirkuit sedemikian rupa sehingga sirkuit RLC tetap tertutup tanpa GGL. Carilah arus  $i(t)$  sebagai fungsi waktu.

**Solusi 3.4.3.** Persamaan sirkuit diberikan oleh

$$Li' + Ri + \frac{1}{C}q = e(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

dan kondisi awalnya adalah

$$i(0) = 0, \quad q(0) = 0.$$

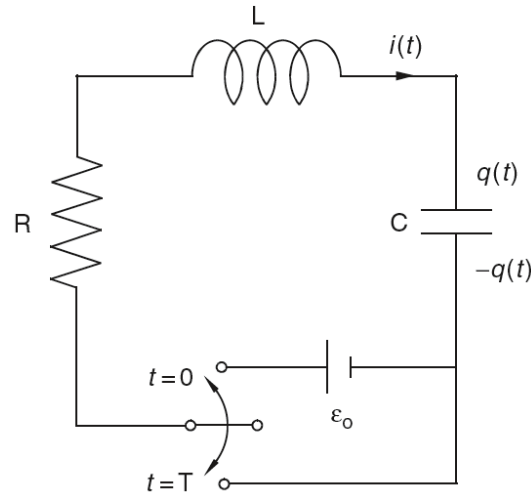
Dalam soal ini

$$e(t) = 90[u(t) - u(t - 1)].$$

Aplikasikan transformasi Laplace pada persamaan diferensial untuk memperoleh

$$Ls\mathcal{L}[i] + R\mathcal{L}[i] + \frac{1}{C}\mathcal{L}[q] = \mathcal{L}[e(t)]$$

$$\mathcal{L}[i] = s\mathcal{L}[q].$$



Gambar 3.7: Sebuah sirkuit RLC. Sirkuit terbuka tanpa muatan pada kapasitor ditutup pada  $t = 0$ . Pada  $t = T$  baterai dilepaskan dari sirkuit sedemikian rupa sehingga sirkuit tertutup tanpa baterai.

Kombinasikan dua persamaan terakhir untuk memperoleh

$$Ls\mathcal{L}[i] + R\mathcal{L}[i] + \frac{1}{Cs}\mathcal{L}[i] = \mathcal{L}[e(t)].$$

Jika kita masukkan nilai  $R$ ,  $L$ ,  $C$  dan  $e(t)$  kita mempunyai

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}[i] + 110\mathcal{L}[i] + \frac{1}{0.001s}\mathcal{L}[i] &= \mathcal{L}[90[u(t) - u(t-1)]] \\ &= 90\frac{1 - e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathcal{L}[i] = 90\frac{1 - e^{-s}}{s^2 + 110s + 1000}.$$

Karena

$$\frac{90}{s^2 + 110s + 1000} = \frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100},$$

kita memiliki

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100} - e^{-s}\left(\frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100}\right)\right] \\ &= e^{-10t} - e^{-100t} - \left(e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)}\right)u(t-1). \end{aligned}$$

### 3.5 Konvolusi

Sifat umum lain yang penting dari transformasi Laplace berhubungan dengan perkalian transformasi. Hal ini terjadi ketika kita diberikan dua buah transformasi  $F(s)$  dan  $G(s)$  yang inversnya  $f(t)$  dan  $g(t)$  kita ketahui, dan kita ingin menghitung invers dari perkalian  $F(s)G(s)$  dari invers yang sudah kita ketahui  $f(t)$  dan  $g(t)$ . Untuk memahami arti dari formulasi matematik, pertama kita akan memperhatikan contoh yang spesifik.

### 3.5.1 Integral Duhamel

Marilah kita perhatikan lagi osilator teredam

$$mx'' + bx' + kx = f(t), \quad (3.59)$$

dengan  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ . Dengan mengaplikasikan transformasi Laplace kita peroleh

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{\mathfrak{L}[f(t)]}{m[(s + \alpha)^2 + \omega^2]}, \quad (3.60)$$

dengan  $\alpha = b/2m$ ,  $\omega^2 = k/m - (b/2m)^2$ . Jika  $f(t)$  adalah impuls satuan pada waktu  $\tau$

$$f(t) = \delta(t - \tau), \quad (3.61)$$

maka kita memiliki

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{e^{-s\tau}}{m[(s + \alpha)^2 + \omega^2]}. \quad (3.62)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[ e^{-s\tau} \mathfrak{L} \left[ \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t \right] \right] \\ &= \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau) u(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Untuk  $t > \tau$ ,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau) u(t - \tau). \quad (3.64)$$

Jika kita menamai  $g(t)$  sebagai solusi untuk kasus khusus dengan  $\tau$  sama dengan nol

$$g(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (3.65)$$

sehingga secara umum jika  $\tau$  tidak sama dengan nol

$$x(t) = g(t - \tau). \quad (3.66)$$

Jika fungsi gayanya adalah

$$f(t) = P\delta(t - \tau), \quad (3.67)$$

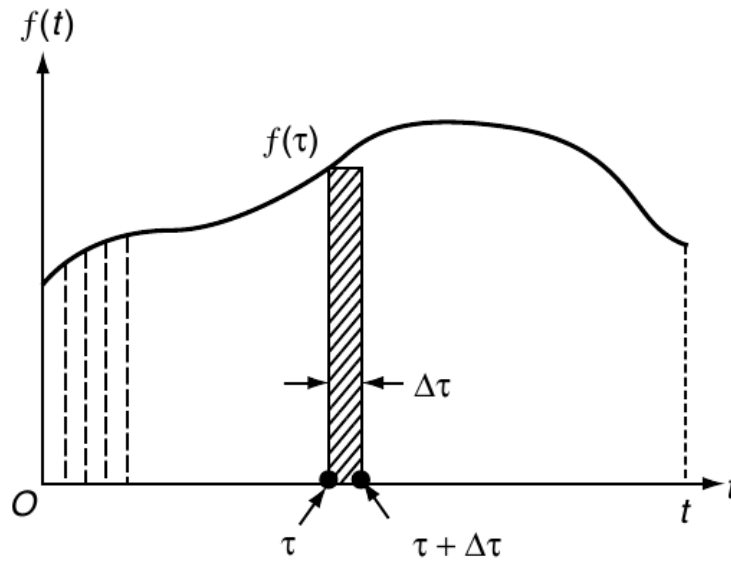
solusinya (fungsi respon) adalah

$$x(t) = Pg(t - \tau). \quad (3.68)$$

Sekarang jika kita memperhatikan respon sistem di bawah fungsi gaya eksternal ditunjukkan pada Gambar 3.8.

Gaya ini dapat diasumsikan terdiri dari deret impuls dengan magnitudo berbeda. Seperti yang sudah kita diskusikan, impuls tidak lain adalah momentum  $P$  yang diberikan. Karena perubahan momentum sama dengan gaya ( $\Delta P/\Delta t = f$ ), impuls yang diberikan dalam selang waktu yang pendek sama dengan gaya dikalikan durasi waktu.

Dengan mengasumsikan pada waktu  $\tau$ , gaya  $f(\tau)$  bekerja pada sistem untuk waktu yang pendek  $\Delta\tau$ , impuls yang bekerja pada  $t = \tau$  diberikan oleh  $f(\tau)\Delta\tau$ . Pada sebarang waktu



Gambar 3.8: Fungsi gaya sebarang.

$t$ , waktu yang dilalui sejak impuls adalah  $t - \tau$ , sehingga respon sistem pada waktu  $t$  yang diakibatkan oleh impuls adalah

$$\Delta x(t) = f(\tau)\Delta\tau g(t - \tau). \quad (3.69)$$

Respon total pada waktu  $t$  dapat dicari dengan menjumlahkan semua respon yang diakibatkan oleh impuls elementer yang bekerja pada semua waktu

$$x(t) = \sum f(\tau)g(t - \tau)\Delta\tau. \quad (3.70)$$

Jika  $\Delta\tau \rightarrow 0$  dan menggantikan penjumlahan dengan integrasi, kita memperoleh

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (3.71)$$

atau

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau)d\tau. \quad (3.72)$$

Hasil ini dikenal sebagai integral Duhamel. Dalam berbagai kasus fungsi  $f(\tau)$  memiliki bentuk yang memungkinkan integrasi eksplisit. Dalam kasus tidak memungkinkan integrasi, integral ini dapat diselesaikan secara numerik tanpa banyak kesulitan.

### 3.5.2 Teorema Konvolusi

Integral Duhamel juga bisa dipandang dengan cara berikut. Karena

$$g(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t = \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{m [(s + \alpha)^2 + \omega^2]} \right], \quad (3.73)$$

dan dengan (3.60)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[x(t)] &= \mathfrak{L}[f(t)] \frac{1}{m[(s+\alpha)^2 + \omega^2]} \\ &= \mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)].\end{aligned}\quad (3.74)$$

diperoleh

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)]]. \quad (3.75)$$

Di lain pihak

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (3.76)$$

maka

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)]]. \quad (3.77)$$

Dari hal ini, sepanjang transformasinya ada, hubungan

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = \mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)] \quad (3.78)$$

secara umum berlaku untuk sebarang fungsi  $f$  dan  $g$ . Hal ini dikenal sebagai teorema konvolusi. Jika hal ini berlaku, maka

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right] = \mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)] \quad (3.79)$$

harus juga berlaku, karena peran yang dimainkan oleh  $f$  dan  $g$  dalam persamaan simetrik. Hal ini dapat didemonstrasikan langsung dengan penggantian variabel. Misalkan  $\lambda = t - \tau$

$$\begin{aligned}\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau &= \int_t^0 f(t-\lambda)g(\lambda)d(-\lambda) \\ &= \int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda.\end{aligned}\quad (3.80)$$

Bukti teorema konvolusi adalah sebagai berikut

Dari definisi

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right] dt. \quad (3.81)$$

Sekarang dengan

$$u(t-\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda < t \\ 0 & \lambda > t \end{cases} \quad (3.82)$$

dan

$$f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda) = \begin{cases} f(t-\lambda)g(\lambda) & \lambda < t \\ 0 & \lambda > t \end{cases}. \quad (3.83)$$

Kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda &= \int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda \\ &\quad + \int_t^\infty f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda\end{aligned}\quad (3.84)$$

suku kedua pada ruas kanan sama dengan nol karena batas bawah dari  $\lambda$  adalah  $t$ , sehingga  $\lambda > t$ . Suku pertama ruas kanan, selang  $\lambda$  adalah antara 0 dan  $t$ , sehingga  $\lambda < t$ , menggunakan (3.83) kita memiliki

$$\int_0^\infty f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda. \quad (3.85)$$

Dengan memasukkan (3.85) pada (3.81)

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right] = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda\right]dt, \quad (3.86)$$

dan merubah urutan integrasi

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^\infty f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda\right]dt &= \\ \int_0^\infty g(\lambda)\left[\int_0^\infty e^{-st}f(t-\lambda)u(t-\lambda)dt\right]d\lambda, & \end{aligned} \quad (3.87)$$

kita peroleh

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right] = \int_0^\infty g(\lambda)\left[\int_0^\infty e^{-st}f(t-\lambda)u(t-\lambda)dt\right]d\lambda. \quad (3.88)$$

Karena adanya  $u(t-\lambda)$ , integran pada integral dalam secara identik sama dengan nol untuk  $t < \lambda$ . Sehingga integral dalam tidak mulai dari  $t = 0$  melainkan pada  $t = \lambda$ . Maka

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right] = \int_0^\infty g(\lambda)\left[\int_\lambda^\infty e^{-st}f(t-\lambda)dt\right]d\lambda. \quad (3.89)$$

Sekarang pada integral dalam ruas kanan, misalkan  $t - \lambda = \tau$  dan  $dt = d\tau$ . Maka

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda\right] &= \int_0^\infty g(\lambda)\left[\int_\lambda^\infty e^{-s(\tau+\lambda)}f(\tau)d\tau\right]d\lambda. \\ &= \int_0^\infty e^{-s\lambda}g(\lambda)\left[\int_\lambda^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right]d\lambda. \\ &= \left[\int_\lambda^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau\right]\left[\int_0^\infty e^{-s\lambda}g(\lambda)d\lambda\right] \\ &= \mathfrak{L}[f(t)]\mathfrak{L}[g(t)] \end{aligned} \quad (3.90)$$

seperti yang sudah dinyatakan.

Notasi yang biasa digunakan untuk integral konvolusi adalah

$$\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda = f(t) * g(t). \quad (3.91)$$

Sehingga teorema konvolusi biasanya dituliskan sebagai

$$\mathfrak{L}[f]\mathfrak{L}[g] = \mathfrak{L}[f * g]. \quad (3.92)$$

**Contoh 3.5.1.** Gunakan konvolusi untuk mencari

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s-a)} \right].$$

**Solusi 3.5.1.** Karena

$$\mathfrak{L}[t] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},$$

kita dapat menuliskan

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s-a)} \right] = \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-a} \right] = \mathfrak{L}^{-1} [\mathfrak{L}[t]\mathfrak{L}[e^{at}]].$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s-a)} \right] = te^{at} = \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1).$$

## 3.6 Sifat-sifat Transformasi Laplace

### 3.6.1 Transformasi Integral

Dari sifat transformasi turunan, kita dapat memperoleh rumus untuk transformasi sebuah integral

$$\mathfrak{L} \left[ \int_0^t f(x) dx \right] = \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^t f(x) dx \right] dt.$$

Misalkan

$$g(t) = \int_0^t f(x) dx,$$

maka

$$g'(t) = f(t) \quad \text{dan} \quad g(0) = 0.$$

Karena

$$\mathfrak{L}[g'(t)] = s\mathfrak{L}[g(t)] - g(0),$$

kita mempunyai

$$\mathfrak{L}[f(t)] = s\mathfrak{L} \left[ \int_0^t f(x) dx \right]. \quad (3.93)$$

Sehingga jika  $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$

$$\mathfrak{L} \left[ \int_0^t f(x) dx \right] = \frac{\mathfrak{L}[f(t)]}{s} = \frac{1}{s} F(s). \quad (3.94)$$

Rumus ini sangat berguna untuk mencari invers transformasi sebuah pecahan yang memiliki bentuk  $p(s)/[s^n q(s)]$ . Sebagai contoh

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s-a)} \right] &= \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \mathfrak{L}[e^{at}] \right] = \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{L} \left[ \int_0^t e^{ax} dx \right] \\ &= \int_0^t e^{ax} dx = \frac{1}{a} (e^{at} - 1). \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-a)}\right] &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathfrak{L}\left[\frac{1}{a}(e^{at}-1)\right]\right] \\ &= \int_0^t \frac{1}{a}(e^{at}-1) dx = \frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)\end{aligned}$$

Metode ini sering lebih nyaman untuk digunakan dibandingkan dengan pecahan parsial.

### 3.6.2 Integrasi Transformasi

Turunan dari  $F(s)$  berhubungan dengan perkalian  $f(t)$  dengan  $-t$ . Secara alami kita mengharapkan bahwa integrasi  $F(s)$  berhubungan dengan pembagian  $f(t)$  dengan  $t$ . Hal ini adalah kasus yang kita tinjau, yang diberikan oleh batas integrasi yang dipilih secara tepat. Jika  $F(s')$  adalah transformasi Laplace dari  $f(t)$  maka

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F(s') ds' &= \int_s^\infty \left[ \int_0^\infty e^{-s't} f(t) dt \right] ds' = \int_0^\infty \left[ \int_s^\infty e^{-s't} f(t) ds' \right] dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[ \int_s^\infty e^{-s't} ds' \right] dt = \int_0^\infty f(t) \left[ -\frac{1}{t} e^{-s't} \right]_{s'=s}^\infty dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \frac{1}{t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{t} f(t) dt = \mathfrak{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right].\end{aligned}\quad (3.95)$$

Hubungan ini, yang bernama

$$\mathfrak{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^\infty \mathfrak{L}[f(t)] ds'$$

berguna ketika  $\mathfrak{L}[f(t)]$  diketahui.

**Contoh 3.6.1.** Carilah (a)  $\mathfrak{L} \left[ \frac{1}{t} (e^{-at} - e^{-bt}) \right]$ , (b)  $\mathfrak{L} \left[ \frac{\sin t}{t} \right]$ .

**Solusi 3.6.1.** (a)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} \left[ \frac{1}{t} (e^{-at} - e^{-bt}) \right] &= \int_s^\infty \mathfrak{L} \left[ (e^{-at} - e^{-bt}) \right] ds' = \int_s^\infty \left( \frac{1}{s'+a} - \frac{1}{s'+b} \right) ds' \\ &= [\ln(s'+a) - \ln(s'+b)]_{s'=s}^\infty = \left[ \ln \frac{s'+a}{s'+b} \right]_{s'=s}^\infty \\ &= \ln 1 - \ln \frac{s+a}{s+b} = \ln \frac{s+b}{s+a}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} \left[ \frac{\sin t}{t} \right] &= \int_s^\infty \mathfrak{L}[\sin t] ds' = \int_s^\infty \frac{1}{s'^2+1} ds' = [\tan^{-1} s']_{s'=s}^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \cot^{-1} s = \tan^{-1} \frac{1}{s}.\end{aligned}$$



### 3.6.3 Penskalaan

Jika  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  sudah diketahui, maka  $\mathcal{L}[f(at)]$  dapat dengan mudah diperoleh. Dengan definisi

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-(s/a)at} f(at) d(at). \quad (3.96)$$

Misalkan  $t' = at$  integralnya menjadi

$$\int_0^\infty e^{-(s/a)at} f(at) d(at) = \int_0^\infty e^{-(s/a)t'} f(t') d(t'),$$

yang merupakan transformasi Laplace dari  $f$  dengan parameter  $s$  diganti dengan  $s/a$ . Sehingga

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (3.97)$$

**Contoh 3.6.2.** Jika  $\mathcal{L}[f(t)]$  diketahui  $1/s(1+2s)$ , carilah  $\mathcal{L}[f(2t)]$ .

**Solusi 3.6.2.**

$$\mathcal{L}[f(2t)] = \frac{1}{2} \frac{1}{(s/2)[1+2(s/2)]} = \frac{1}{s(1+s)}.$$

**Contoh 3.6.3.** Carilah  $\mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right]$

**Solusi 3.6.3.** Karena  $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \tan^{-1} \frac{1}{s}$ , kemudian

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega t}{\omega t}\right] = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{\omega}{s}.$$

Sehingga

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right] = \tan^{-1} \frac{\omega}{s}.$$

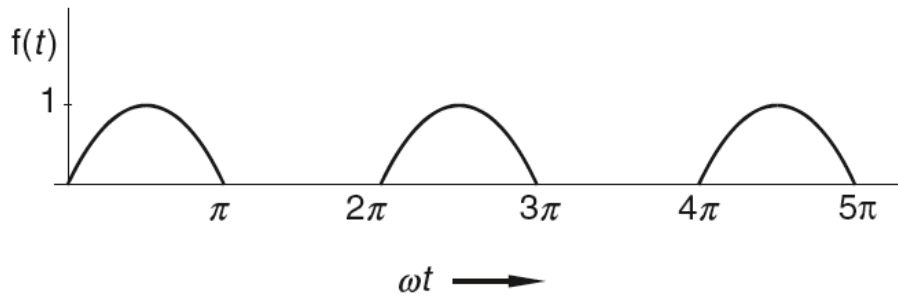
### 3.6.4 Transformasi Laplace Fungsi Periodik

Sering kita menjumpai fungsi input sistem fisika adalah fungsi periodik. Sebuah fungsi dikatakan periodik jika terdapat sebuah bilangan  $p$  sehingga

$$f(t+p) = f(t).$$

Nilai  $p$  ini disebut sebagai periode dari  $f$ . Sebuah fungsi periodik memiliki karakteristik

$$f(t) = f(t+p) = f(t+2p) = \dots f(t+np) \dots \quad (3.98)$$



Gambar 3.9: Penyearah setengah gelombang.

Transformasi Laplace  $f(t)$  merupakan sebuah deret integral

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt \dots\end{aligned}\quad (3.99)$$

Jika kita merubah variabel  $t = \tau + np$

$$\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt = \int_0^p e^{-s(\tau+np)} f(\tau+np) d\tau = e^{-snp} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau.$$

Variabel integrasi dummy  $\tau$  dapat kita pilih sama dengan  $t$ , sehingga

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[f] &= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + e^{-sp} \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \dots + e^{-snp} \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \dots \\ &= (1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \dots + e^{-nsp} + \dots) \int_0^p e^{-st} f(t) dt.\end{aligned}\quad (3.100)$$

Dengan ekspansi deret,  $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$ , persamaan ini menjadi

$$\mathfrak{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt.\quad (3.101)$$

**Contoh 3.6.4. Penyearah Setengah Gelombang:** Carilah transformasi Laplace fungsi periodik (Gambar 3.9) yang definisi satu periodenya

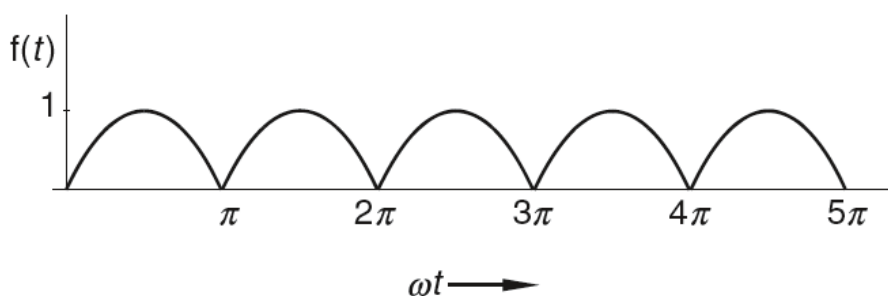
$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{jika } 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{jika } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}.$$

**Solusi 3.6.4.**

$$\mathfrak{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-s2\pi/\omega}} \int_0^{2\pi/\omega} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-s2\pi/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t dt$$

Integral ini dapat dihitung dengan integral parsial. Tetapi, lebih mudah untuk memperhatikan bahwa integral ini adalah suku imajiner dari

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/\omega} e^{-st} e^{i\omega t} dt &= \left[ \frac{1}{-s + i\omega} e^{-st + i\omega t} \right]_0^{\pi/\omega} = \frac{1}{-s + i\omega} (e^{-s\pi/\omega + i\pi} - 1) \\ &= \frac{-s - i\omega}{s^2 + \omega^2} (-e^{-s\pi/\omega} - 1).\end{aligned}$$



Gambar 3.10: Penyearah gelombang penuh.

Sehingga

$$\mathfrak{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-s2\pi/\omega}} \frac{\omega (1 + e^{-s\pi/\omega})}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2) (1 + e^{-s\pi/\omega})}.$$

**Contoh 3.6.5. Penyearah Gelombang Penuh:** Carilah transformasi Laplace fungsi periodik (Gambar 3.10) yang definisi satu periodenya

$$f(t) = |\sin \omega t| \quad 0 < t < \frac{\pi}{\omega}.$$

**Solusi 3.6.5.** Dalam kasus ini periodenya adalah  $\pi/\omega$ . Maka

$$\mathfrak{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-s\pi/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t \, dt = \frac{\omega (1 + e^{-s\pi/\omega})}{(s^2 + \omega^2) (1 + e^{-s\pi/\omega})}.$$

Hasil ini sangat sempurna untuk disederhanakan. Jika kita kalikan pembilang dan penyebutnya dengan  $\exp(s\pi/2\omega)$

$$\mathfrak{L}[f] = \frac{\omega (e^{s\pi/(2\omega)} + e^{-s\pi/(2\omega)})}{(s^2 + \omega^2) (e^{s\pi/(2\omega)} - e^{-s\pi/(2\omega)})} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} \coth \frac{s\pi}{2\omega}.$$

### 3.6.5 Invers Transformasi Laplace Melibatkan Fungsi Periodik

Transformasi Laplace sebarang  $F(s)$  baik yang memiliki faktor  $(1 - e^{-sp})^{-1}$ , atau dapat dituliskan dalam sebuah bentuk dengan sebuah faktor seperti pada contoh terakhir, mengindikasikan bahwa invers transformasinya merupakan sebuah fungsi periodik. Tetapi, periodenya bisa merupakan perkalian dari  $p$ . Hal ini diilustrasikan pada contoh berikut.

**Contoh 3.6.6.** Carilah invers transformasi Laplace berikut ini beserta periodenya

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1) (1 - e^{-s\pi})}.$$

**Solusi 3.6.6.**

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s^2 + 1)(1 - e^{-s\pi})} \right] \\
 &= \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s}{(s^2 + 1)} (1 + e^{-s\pi} + e^{-2s\pi} + e^{-3s\pi} + \dots) \right] \\
 &= \cos t + u(t - \pi) \cos(t - \pi) + u(t - 2\pi) \cos(t - 2\pi) \\
 &\quad + u(t - 3\pi) \cos(t - 3\pi) + u(t - 4\pi) \cos(t - 4\pi) + \dots \\
 &= \cos t - u(t - \pi) \cos t + u(t - 2\pi) \cos t - u(t - 3\pi) \cos t + \dots \\
 &= [1 - u(t - \pi)] \cos t + [u(t - 2\pi) - u(t - 3\pi)] \cos t + \dots
 \end{aligned}$$

Sehingga  $f(t)$  adalah fungsi periodik berperiode  $2\pi$ , dengan definisi satu periodenya

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{jika } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{jika } \pi < t < 2\pi \end{cases} .$$

### 3.6.6 Transformasi Laplace dan Fungsi Gamma

Transformasi Laplace  $t^n$  didefinisikan sebagai

$$\mathfrak{L}[t^n] = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt. \quad (3.102)$$

Jika kita mengganti variabel dan misalkan  $st = x$ , integralnya menjadi

$$\mathfrak{L}[t^n] = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^n d\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx. \quad (3.103)$$

Integral terakhir ini dikenal sebagai fungsi Gamma dari  $n+1$  yang dituliskan  $\Gamma(n+1)$ . Fungsi Gamma akan sering kita jumpai dalam aplikasi. Fungsi ini diberikan oleh

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad (3.104)$$

hal ini terdefinisi dengan baik sepanjang  $n$  tidak nol atau bilangan bulat negatif. Untuk  $n = 1$ ,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [e^{-x}]_0^{\infty} e^{-x} = 1. \quad (3.105)$$

Dengan menggunakan integral parsial, kita bisa memperoleh

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = [-x^n e^{-x}]_0^{\infty} e^{-x} + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n\Gamma(n). \quad (3.106)$$

Sehingga jika  $n$  bilangan bulat positif

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1) \cdots 1\Gamma(1) = n!, \quad (3.107)$$

dan menurut (3.103)

$$\mathfrak{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (3.108)$$

selaras dengan hasil yang sudah didapatkan sebelumnya. Karena  $\Gamma(n)$  adalah fungsi yang ditabulasikan, sepanjang  $n > -1$ ,  $\mathfrak{L}[t^n]$  masih tetap bisa dihitung meskipun  $n$  bukan bilangan bulat. Sebagai contoh

$$\mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}, \quad (3.109)$$

$$\mathfrak{L}\left[\sqrt{t}\right] = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2})}{s^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}, \quad (3.110)$$

di sini kita telah menggunakan  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

### 3.7 Ringkasan Operasi Transformasi Laplace

Sifat-sifat transformasi Laplace tidak sulit untuk dipahami. Tetapi, karena terdapat banyak sekali, maka tidak begitu mudah bagi kita untuk menentukan sifat mana yang akan kita gunakan dalam satu persoalan spesifik. Dalam Tabel 3.2 kita meringkas operasi-operasi ini. Dalam kolom terakhir kita memberikan contoh sederhana dan pada kolom pertama kita memberikan nama untuk mengkarakterisasi operasinya. Klasifikasi ini membantu dalam mengingat detil dari tiap operasi.

Dalam Subbab 3.6.1, kita membicarakan invers transformasi  $F(s)$  dalam bentuk pembagian dua buah polinomial. Jika  $F(s)$  tidak dalam bentuk tersebut, kadang kita dapat menggunakan sifat transformasi Laplace untuk mendapatkan inversnya.

**Contoh 3.7.1.** Carilah  $\mathfrak{L}^{-1}\left[\ln \frac{s+a}{s-b}\right]$ .

**Solusi 3.7.1.** Transformasinya tidak berbentuk pembagian dua buah polinomial, tetapi turunannya. Misalkan

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \ln \frac{s+a}{s-b}, \quad f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\ln \frac{s+a}{s-b}\right].$$

Karena

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[tf(t)] &= -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}[f(t)] = -\frac{d}{ds} \ln \frac{s+a}{s-b} \\ &= -\frac{d}{ds} \ln(s+a) + \frac{d}{ds} \ln(s-b) = \frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a}, \end{aligned}$$

dan

$$tf(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\mathfrak{L}[f(t)]\right] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a}\right]$$

sehingga

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}\left[\ln \frac{s+a}{s-b}\right] &= f(t) = \frac{1}{t}\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a}\right] \\ &= \frac{1}{t}(e^{bt} - e^{-at}) \end{aligned}$$

Tabel 3.2: Ringkasan Operasi Transformasi Laplace

Nama	$h(t)$	$\mathfrak{L}[h(t)]$	Contoh: Misalkan $f(t) = t$
Definisi	$f(t)$	$F(s)$	$\mathfrak{L}[t] = \int_0^\infty e^{-st} t \, dt = \frac{1}{s^2} = F(s)$
Perkalian $t$	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$	$\mathfrak{L}[t \cdot t] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$
Pembagian $t$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\varsigma) \, d\varsigma$	$\mathfrak{L}\left[\frac{t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{\varsigma^2} d\varsigma = \frac{1}{s}$
Turunan	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$\mathfrak{L}\left[\frac{dt}{dt}\right] = s\frac{1}{s^2} - 0 = \frac{1}{s}$
Integral	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	$\mathfrak{L}\left[\int_0^t \tau \, d\tau\right] = \frac{1/s^2}{s} = \frac{1}{s^3}$
<i>Shifting</i> – $s$	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$\mathfrak{L}[e^{at}t] = \frac{1}{(s-a)^2}$
<i>Shifting</i> – $t$	$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$	$\mathfrak{L}[u(t-a)(t-a)] = e^{-sa} \frac{1}{s^2}$
<i>Scaling</i>	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$\mathfrak{L}[at] = \frac{1}{a} \frac{1}{(s/a)^2} = a \frac{1}{s^2}$
Periode– $p$	$f(t)$ periodik	$\frac{\int_0^p e^{-st} f(t) \, dt}{1 - e^{-ps}}$	$\mathfrak{L}[f] = \frac{1 - (1+ps)e^{-ps}}{s^2(1 - e^{-ps})}$
Konvolusi	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s) \cdot G(s)$	Misal $g(t) = f(t)$ , $G(s) = F(s)$  $\mathfrak{L}\left[\int_0^t \tau(t-\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s^2} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^4}$

**Contoh 3.7.2.** Carilah  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \ln \frac{s^2 - a^2}{s^2} \right]$ .

**Solusi 3.7.2.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \ln \frac{s^2 - a^2}{s^2} \right] &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{d}{ds} \ln \frac{s^2 - a^2}{s^2} \right] = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s}{s^2 - a^2} - \frac{2s}{s^2} \right] \\ &= \frac{2}{t} (1 - \cosh at). \end{aligned}$$

**Contoh 3.7.3.** Carilah  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \ln \frac{s^2 + \omega^2}{s^2} \right]$ .

**Solusi 3.7.3.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \ln \frac{s^2 + \omega^2}{s^2} \right] &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{d}{ds} \ln \frac{s^2 + \omega^2}{s^2} \right] = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s}{s^2 + \omega^2} - \frac{2s}{s^2} \right] \\ &= \frac{2}{t} (1 - \cos \omega t). \end{aligned}$$

**Contoh 3.7.4.** Carilah  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \tan^{-1} \frac{1}{s} \right]$ .

**Solusi 3.7.4.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \tan^{-1} \frac{1}{s} \right] &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{d}{ds} \tan^{-1} \frac{1}{s} \right] = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(1/s)^2 + 1} \frac{d}{ds} \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{1 + s^2} \right] = \frac{1}{t} \sin t \end{aligned}$$

## 3.8 Aplikasi Tambahan Transformasi Laplace

### 3.8.1 Menghitung Integral

Banyak integral dari 0 sampai  $\infty$  dapat dihitung dengan metode transformasi Laplace.

#### Substitusi langsung

. Integral yang melibatkan  $e^{-at}$  dapat diperoleh dari transformasi Laplace dengan substitusi sederhana

$$\int_0^{\infty} e^{-at} f(t) dt = \left\{ \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right\}_{s=a} = \{\mathcal{L}[f(t)]\}_{s=a}. \quad (3.111)$$

**Contoh 3.8.1.** Hitunglah  $\int_0^{\infty} e^{-3t} \sin t dt$

**Solusi 3.8.1.**

$$\int_0^{\infty} e^{-3t} \sin t dt = \{\mathcal{L}[\sin t]\}_{s=3} = \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\}_{s=3} = \frac{1}{10}.$$

**Contoh 3.8.2.** Hitunglah  $\int_0^{\infty} e^{-2t} t \cos t \, dt$ .

**Solusi 3.8.2.** Karena

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} t \cos t \, dt = \{\mathcal{L}[t \cos t]\}_{s=2},$$

$$\{\mathcal{L}[t \cos t]\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[t \cos t] = -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2},$$

maka

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} t \cos t \, dt = \left\{ \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \right\}_{s=2} = \frac{3}{25}.$$

**Dengan integral transformasinya.**

Dalam Subbab 3.6.2 kita telah menunjukkan

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s') \, ds',$$

dengan

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{f(t)}{t} \, dt, \quad F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, dt.$$

Jika kita memilih  $s = 0$ , kita peroleh rumus yang sama pentingnya

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} \, dt = \int_0^{\infty} \mathcal{L}[f(x)] \, ds. \quad (3.112)$$

Rumus ini dapat digunakan apabila integrasi di ruas kiri sulit untuk dilakukan.

**Contoh 3.8.3.** Hitunglah  $\int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \right] dt$ .

**Solusi 3.8.3.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \right] dt &= \int_0^{\infty} \mathcal{L}[e^{-t} - e^{-3t}] \, ds = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) ds \\ &= [\ln(s+1) - \ln(s+3)]_0^{\infty} = \left[ \ln \frac{s+1}{s+3} \right]_0^{\infty} \\ &= \ln 1 - \ln \frac{1}{3} = \ln 3. \end{aligned}$$

**Contoh 3.8.4.** Hitunglah  $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Solusi 3.8.4.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^{\infty} \mathcal{L}[\sin t] ds = \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2 + 1} ds \\ &= [\tan^{-1} s]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.113)$$



**Menggunakan integral ganda.**

Kita dapat menyelesaikan soal pada contoh terakhir dengan integral ganda. Kita mulai dengan

$$\mathfrak{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad (3.114)$$

jika kita menamai ulang  $t$  sebagai  $x$  dan  $s$  sebagai  $t$ , kita peroleh

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}. \quad (3.115)$$

Jadi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \sin t \left[ \frac{1}{t} \right] dt = \int_0^{\infty} \sin t \left[ \int_0^{\infty} e^{-tx} dx \right] dt. \quad (3.116)$$

Dengan menukar urutan integrasi, kita memiliki

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-tx} \sin t dt \right] dx. \quad (3.117)$$

Integral di dalam kurung adalah transformasi Laplace  $\sin t$  dengan parameter  $s$  diganti  $x$ , sehingga

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1} x]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.118)$$

Metode ini dapat diaplikasikan untuk kasus yang lebih rumit.

**Contoh 3.8.5.** Carilah  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ .

**Solusi 3.8.5.** Pertama kita perhatikan

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t),$$

kemudian menuliskan

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2t) \left[ \frac{1}{t^2} \right] dt.$$

Dengan

$$\frac{1}{t^2} = \int_0^{\infty} e^{-tx} x dx,$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2t) \left[ \int_0^{\infty} e^{-tx} x dx \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-tx} (1 - \cos 2t) dt \right] x dx. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-tx} (1 - \cos 2t) dt &= [\mathfrak{L}(1 - \cos 2t)]_{s=x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4} = \frac{4}{x(x^2 + 4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{4}{x(x^2+4)} \right] x dx \\ &= \int_0^\infty \frac{2}{x^2+4} dx = \left[ \tan^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

### Menggunakan invers transformasi.

Jika integralnya sulit dikerjakan, pertama kita dapat melakukan transformasi Laplace kemudian mencari inversnya.

**Contoh 3.8.6.** Carilah  $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+b^2} dx$

**Solusi 3.8.6.** Untuk menggunakan transformasi Laplace dalam menghitung integral ini, kita mengganti  $\cos x = \cos tx$  kemudian di akhir kita pilih  $t = 1$ . Misalkan

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+b^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[I(t)] &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2+b^2} \mathfrak{L}[\cos tx] dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+b^2} \frac{s}{s^2+x^2} dx \\ &= \frac{s}{s^2-b^2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{x^2+b^2} - \frac{1}{s^2+x^2} \right] dx \\ &= \frac{s}{s^2-b^2} \left\{ \left[ \frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b} \right]_0^\infty - \left[ \frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{x}{s} \right]_0^\infty \right\} \\ &= \frac{s}{s^2-b^2} \left\{ \frac{\pi}{2b} - \frac{\pi}{2s} \right\} = \frac{\pi}{2b} \frac{1}{s+b}.\end{aligned}$$

$$I(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{\pi}{2b} \frac{1}{s+b} \right] = \frac{\pi}{2b} e^{-bt}.$$

Maka

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+b^2} dx = I(1) = \frac{\pi}{2b} e^{-b}.$$

### 3.8.2 Persamaan Diferensial dengan Koefisien Variabel

Jika  $f(t)$  dalam rumus

$$\mathfrak{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} \mathfrak{L}[f(t)]$$

diambil sebagai turunan  $y(t)$  ke  $-n$  maka

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[ty^{(n)}(t)] &= -\frac{d}{ds} \mathfrak{L}[y^{(n)}(t)] \\ &= -\frac{d}{ds} \{s^n \mathfrak{L}[y(t)] - s^{n-1}y(0) \dots - y^{(n-1)}(0)\}.\end{aligned}\tag{3.119}$$

Persamaan ini dapat digunakan untuk mentransformasikan sebuah persamaan diferensial linier dengan koefisien variabel menjadi sebuah persamaan yang melibatkan transformasinya. Prosedur ini berguna jika persamaan baru mudah dipecahkan.

**Contoh 3.8.7.** Carilah solusi dari

$$ty''(t) - ty'(t) - y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

**Solusi 3.8.7.**

$$\mathcal{L}[ty''(t)] = -\frac{d}{ds}\{s^2\mathcal{L}[y(t)] - sy(0) - y'(0)\}.$$

Misalkan  $\mathcal{L}[y(t)] = F(s)$  dengan  $y(0) = 0$ , kita memiliki

$$\mathcal{L}[ty''(t)] = -2sF(s) - s^2F'(s),$$

$$\mathcal{L}[ty'(t)] = -F(s) - sF'(s).$$

Sehingga

$$\mathcal{L}[ty''(t) - ty'(t) - y(t)] = -s(s-1)F'(s) - 2sF(s) = 0.$$

Mengikuti hal ini

$$\frac{dF(s)}{F(s)} = -2\frac{ds}{s-1},$$

$$\ln F(s) = \ln(s-1)^{-2} + \ln C$$

$$F(s) = \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s-1)^2}\right] = C e^t t.$$

Karena

$$y'(t) = C e^t t + C e^t,$$

$$y'(0) = C = 2,$$

Maka

$$y(t) = 2e^t t.$$

Mudah dibuktikan bahwa ini adalah solusinya karena memenuhi persamaan diferensial dan kondisi awalnya.

**Contoh 3.8.8. Fungsi Bessel Orde ke-Nol** Carilah solusi dari

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Contoh 3.8.8.** Dengan  $\mathcal{L}[y(t)] = F(s)$  dan  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

$$\mathcal{L}[ty''(t) + y'(t) + ty(t)] = -\frac{d}{ds}\{s^2F(s) - s\} + sF(s) - 1 - \frac{d}{ds}F(s) = 0.$$

Dengan mengumpulkan suku-sukunya

$$(s^2 + 1)\frac{d}{ds}F(s) + sF(s) = 0,$$

atau

$$\frac{dF(s)}{F(s)} = -\frac{s ds}{s^2 + 1} = -\frac{1}{2} \frac{ds^2}{s^2 + 1}.$$

Mengikuti dari sini

$$\begin{aligned} \ln F(s) &= -\frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + \ln C, \\ F(s) &= \frac{C}{(s^2 + 1)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Untuk mencari invers transformasi Laplace ini, kita ekspansikan menjadi deret untuk kasus  $s > 1$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{C}{s} \left[ 1 + \frac{1}{s^2} \right]^{-1/2} \\ &= \frac{C}{s} \left[ 1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{1}{s^4} \cdots + \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{s^{2n}} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Dengan membalik/inversi suku per suku diperoleh

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2}.$$

Karena  $y(0) = 1$ , maka  $C = 1$ . Dari sini deret dengan  $C = 1$  dikenal sebagai fungsi Bessel orde ke-nol  $J_0(t)$ , yaitu

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2},$$

yang akan kita bicarakan lebih detail dalam bab fungsi Bessel. Maka solusi persamaannya adalah

$$y(t) = J_0(t).$$

Lebih dari itu, kita mempunyai

$$\mathfrak{L}[J_0(t)] = \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}}.$$

Dengan sifat penskalaan transformasi Laplace, untuk  $a > 0$  kita mempunyai

$$\mathfrak{L}[J_0(at)] = \frac{1}{a} \frac{1}{[(s/a)^2 + 1]^{1/2}} = \frac{1}{(s^2 + a^2)^{1/2}}.$$

### 3.8.3 Persamaan Integral dan Integrodiferensial

Persamaan dengan fungsi yang tidak diketahui muncul di bawah integral disebut persamaan integral. Jika turunan juga ada pada persamaan tersebut, maka dinamakan persamaan integrodiferensial. Biasanya persamaan ini sulit dipecahkan. Tetapi jika bentuk integralnya adalah konvolusi, maka transformasi Laplace dapat digunakan untuk memecahkannya. Contoh berikut akan membuat prosedur ini jelas.

**Contoh 3.8.9.** Selesaikan persamaan integral

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

**Solusi 3.8.9.**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau\right] \\ &= \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[y(t)]\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}[y(t)]\frac{1}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Kita selesaikan  $\mathcal{L}[y(t)]$

$$\left(1 - \frac{1}{s^2 + 1}\right) \mathcal{L}[y(t)] = \frac{1}{s^2}.$$

Sehingga

$$\mathcal{L}[y(t)] = \frac{s^2 + 1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

dan

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\right] = t + \frac{1}{6}t^3.$$

**Contoh 3.8.10.** Carilah solusi dari

$$y'(t) - 3 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} y(\tau) d\tau = z(t), \quad y(0) = 4,$$

$$z(t) = \begin{cases} 4e^{-2t} & 1 < t \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}.$$

**Solusi 3.8.10.** Pertama perhatikan

$$\mathcal{L}[z(t)] = \mathcal{L}[4e^{-2t}u(t-1)] = \mathcal{L}\left[4e^{-2}e^{-2(t-1)}u(t-1)\right] = 4e^{-2}\frac{1}{s+2}e^{-s},$$

$$\mathcal{L}\left[3 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} y(\tau) d\tau\right] = 3\frac{1}{s+2}\mathcal{L}[y].$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace pada dua ruas persamaan diperoleh

$$s\mathcal{L}[y] - 4 - 3\frac{1}{s+2}\mathcal{L}[y] = 4e^{-2}\frac{1}{s+2}e^{-s},$$

dengan mengumpulkan suku-sukunya

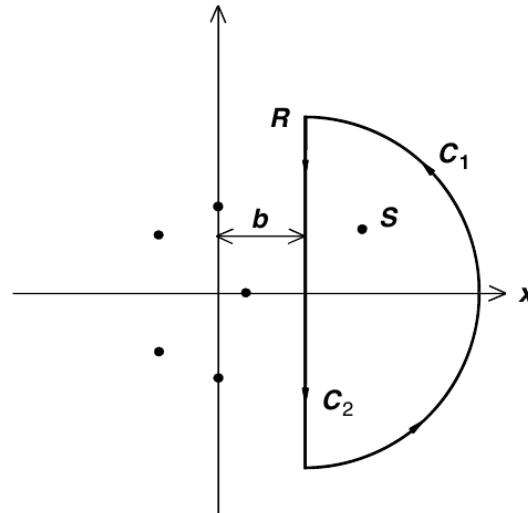
$$\frac{s^2 + 2s - 3}{s+2}\mathcal{L}[y] = 4 + 4e^{-2}\frac{1}{s+2}e^{-s},$$

atau

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] &= \frac{4(s+2) + 4e^{-2}e^{-s}}{s^2 + 2s - 3} \\ &= \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s+3} + e^{-2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3}\right)e^{-s}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$y(t) = 3e^t + e^{-3t} + e^{-2}\left(e^{(t-1)} - e^{-3(t-1)}\right)u(t-1).$$



Gambar 3.11: Kontur pertama yang digunakan untuk memperoleh inversi kompleks transformasi Laplace.

### 3.9 Inversi dengan Integral Kontur

Seperti yang sudah kita lihat bahwa untuk bisa membalik sebuah transformasi  $F(s)$  yang diberikan untuk mencari fungsi  $f(t)$  adalah kunci untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan transformasi Laplace. Untuk pembaca yang familiar dengan integrasi kontur kompleks, kita memberikan dalam subbab ini teknik universal mencari invers transformasi Laplace. Penurunannya sangat imajinatif, tetapi hasilnya sangat sederhana.

Pertama marilah kita perluas transformasi Laplace dalam domain kompleks. Fungsi  $F(z)$  sama dengan fungsi  $F(s)$  hanya  $s$  diganti dengan  $z$ . Dalam bidang kompleks,  $F(z)$  akan memiliki beberapa titik singular. Marilah kita pilih sebuah garis  $x = b$  dalam bidang kompleks sehingga semua titik singular  $F(z)$  berada di sisi kiri garis ini. Sehingga  $F(z)$  analitik pada garis  $x = b$  dan pada semua setengah bidang di sebelah kanan garis. Jika  $s$  titik sebarang pada setengah bidang ini, kita dapat memilih kontur setengah lingkaran  $C = C_1 + C_2$ , seperti Gambar 3.11, dan menggunakan rumus integral Cauchy

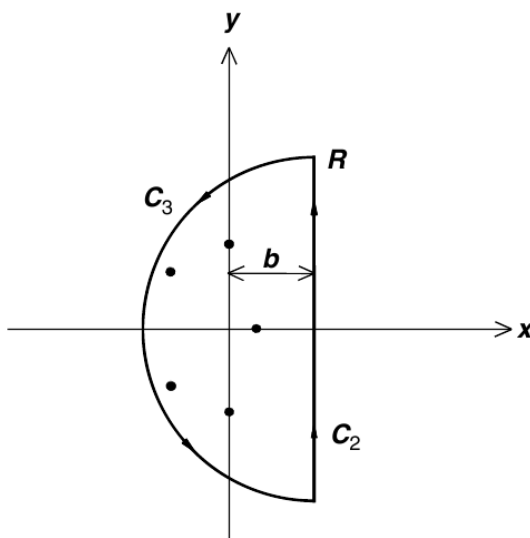
$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z)}{z-s} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b+iR}^{b-iR} \frac{F(z)}{z-s} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{F(z)}{z-s} dz. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Sekarang jika kita ijkinkan  $R$  menuju tak hingga, (3.120) tetap berlaku, tetapi semua nilai  $z$  pada  $C_1$  sangat besar. Karena  $F(z) \rightarrow 0$  ketika  $z \rightarrow \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{F(z)}{z-s} dz = 0.$$

Dalam limit ini (3.120) menjadi

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b+i\infty}^{b-i\infty} \frac{F(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(z)}{s-z} dz.$$



Gambar 3.12: Kontur pertama yang digunakan untuk memperoleh inversi kompleks transformasi Laplace.

Dalam langkah terakhir kita telah merubah tanda integran dan menukar batas atas dan bawah integral.

Dengan mengambil invers transformasi Laplace, kita peroleh

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(z)}{s-z} dz \right].$$

Karena operator invers transformasi Laplace  $\mathfrak{L}^{-1}$  hanya untuk variabel  $s$ , kita dapat menuliskan

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z) \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-z} \right] dz.$$

Karena

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-z} \right] = e^{zt}$$

Kita memiliki

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z) e^{zt} dz. \quad (3.121)$$

Prosedur ini dikenal sebagai inversi Mellin. Integral ini dari  $b - i\infty$  ke  $b + i\infty$  sepanjang  $C_2$ . Biasanya perhitungan integral ini diselesaikan dengan teorema residu. Untuk menggunakan teorema residu, kita harus memiliki kontur tertutup. Untuk menutup kontur, kita harus menambahkan garis balik dari  $b + i\infty$  ke  $b - i\infty$  sedemikian rupa sehingga nilai integralnya tidak berubah. Hal ini dapat dilakukan dengan kontur setengah lingkaran  $C_3$  dalam setengah bidang di sebelah kiri seperti Gambar 3.12, karena

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} F(z) e^{zt} dz = 0. \quad (3.122)$$

Hal ini dapat dipahami dari kenyataan bahwa dengan  $t$  positif, integran

$$F(z) e^{zt} = F(z) e^{xt+iyt}$$

nilainya menuju nol ketika  $z$  menuju tak hingga. Faktor  $e^{iyt}$  berosilasi dengan nilai maksimum 1. Untuk  $x$  agar merubah  $b$  dari  $-\infty$  seperti pada  $C_3$ , faktor  $e^{xt}$  selalu lebih kecil dari  $e^{bt}$ . Sehingga  $F(z)e^{zt}$  akan menuju nol sepanjang  $F(z)$  juga menuju nol. Perhatikan bahwa hal ini tidak berlaku pada setengah bidang di sebelah kanan dengan  $x$  menuju positif tak hingga dan  $e^{zt}$  akan sangat besar. Maka dengan  $C_3$ , kita memiliki

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z)e^{zt} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{C_2} F(z)e^{zt} dz + \int_{C_3} F(z)e^{zt} dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z)e^{zt} dz,\end{aligned}\tag{3.123}$$

dengan  $C = C_2 + C_3$  seperti Gambar 3.12 dengan  $R \rightarrow \infty$ . Kontur ini juga dinamakan kontur Bromwich. Karena  $b$  berada di sebelah kanan semua titik singular dari  $F(z)$ , kontur  $C$  melingkupi semua titik singular dari  $e^{zt}F(z)$ . Sehingga dengan teorema residu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) e^{zt} dz \\ &= \sum \text{semua sisa dari } F(z) e^{zt}.\end{aligned}\tag{3.124}$$

**Contoh 3.9.1.** Gunakan inversi integral kompleks untuk menghitung

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+a)^2 + b^2} \right].$$

**Solusi 3.9.1.** Karena

$$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1}{[s - (-a + ib)][s - (-a - ib)]},$$

residu dari

$$\frac{e^{zt}}{(z+a)^2 + b^2}$$

pada dua buah titik singular

$$\begin{aligned}r_1 &= \lim_{z \rightarrow -a+ib} [z - (-a + ib)] \frac{e^{zt}}{[z - (-a + ib)][z - (-a - ib)]} \\ &= \frac{e^{(-a+ib)t}}{2ib}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}r_2 &= \lim_{z \rightarrow -a-ib} [z - (-a - ib)] \frac{e^{zt}}{[z - (-a + ib)][z - (-a - ib)]} \\ &= \frac{e^{(-a-ib)t}}{-2ib}.\end{aligned}$$



Sehingga

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2+b^2}\right] &= \frac{e^{(-a+ib)t}}{2ib} + \frac{e^{(-a-ib)t}}{-2ib} \\ &= \frac{1}{b}e^{-at}\frac{1}{2i}(e^{ibt} - e^{-ibt}) \\ &= \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt.\end{aligned}$$

Ini adalah hasil yang familiar. Contoh ini menunjukkan inversi integral kompleks merupakan cara lain untuk mencari invers transformasi Laplace. Dalam aplikasi yang lebih sulit, penggunaan inversi integral kompleks dan integral kontur bisa merupakan satu-satunya cara atau cara paling sederhana untuk mencari invers transformasi Laplace.

## Latihan

1. Carilah transformasi Laplace tiap fungsi berikut dengan integral langsung

(a)  $\frac{1}{2}t^2$ , (b)  $e^{3t}$ , (c)  $3\sin(3t)$ .

Jawab. (a)  $\frac{1}{s^3}$ , (b)  $\frac{1}{s-3}$ , (c)  $\frac{9}{s^2+9}$ .

2. Carilah transformasi Laplace fungsi berikut dengan menggunakan operasi “Perkalian  $t$ ” pada Tabel 3.2.

(a)  $te^t$ , (b)  $t\cos t$ , (c)  $t^2\cos t$ .

Jawab. (a)  $\frac{1}{(s-1)^2}$ , (b)  $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$ , (c)  $\frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}$ .

3. Carilah transformasi Laplace fungsi berikut dengan menggunakan operasi “Pembagian  $t$ ” pada Tabel 3.2.

(a)  $\frac{1}{t}(e^{2t} - e^{-2t})$ , (b)  $\frac{2}{t}(1 - \cos(2t))$ , (c)  $\frac{1}{t}\sin(4t)$ .

Jawab. (a)  $\ln\left(\frac{s+2}{s-2}\right)$ , (b)  $\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$ , (c)  $\frac{\pi}{2}\tan^{-1}\left(\frac{s}{4}\right)$ .

4. Carilah transformasi Laplace fungsi berikut dengan menggunakan operasi “*Shifting*  $-s$ ” pada Tabel 3.2.

(a)  $e^{at}\sin 3t$ , (b)  $e^{-2t}t\sin at$ , (c)  $\sinh t\cos t$ .

Jawab. (a)  $\frac{3}{(s-a)^2+9}$ , (b)  $\frac{2a(s+2)}{[(s+2)^2+a^2]^2}$ , (c)  $\frac{s^2-2}{s^4+4}$ .

5. Gunakan definisi transformasi Laplace untuk membuktikan

(a)  $\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0)$ ;

(b)  $\mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0)$ .

6. Gunakan hasil dari soal sebelumnya dan juga kenyataan bahwa  $\frac{d^2}{dt^2}\cos at = -a^2\cos at$  dan  $\frac{d^2}{dt^2}\sin at = -a^2\sin at$  untuk membuktikan

(a)  $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$ , (b)  $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$ .

7. Turunkan bagian (b) soal sebelumnya terhadap  $a$  dan buktikan bahwa

$$(a) \mathfrak{L}[t \cos at] = \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Turunkan bagian (a) soal sebelumnya terhadap  $s$  dan buktikan bahwa

$$(b) \mathfrak{L}[-t \cos at] = \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{2s^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

8. Gunakan hasil pada soal 6 dan 7 untuk membuktikan

$$(a) \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at),$$

$$(b) \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \frac{1}{2} (t \cos at + \frac{1}{a} \sin at)$$

9. Kerjakan soal 8 dengan teorema konvolusi.

Petunjuk: Anda mungkin memerlukan integral berikut

$$\int_0^t \sin a\tau \cos a\tau \, d\tau = \frac{1}{4a} (1 - \cos 2at);$$

$$\int_0^t \sin^2 a\tau \, d\tau = \frac{1}{4a} (2at - \sin 2at).$$

10. Jika  $f(t) = t^n$ ,  $g(t) = t^m$ ,  $n > -1$ ,  $m > -1$ ,

(a) Tunjukkan bahwa

$$\int_0^t \tau^n (t - \tau)^m \, d\tau = t^{n+m+1} \int_0^1 y^n (1 - y)^m \, dy.$$

(b) Dengan menggunakan teorema konvolusi, buktikan bahwa

$$\int_0^1 y^n (1 - y)^m \, dy = \frac{n!m!}{(n + m + 1)!}.$$

Petunjuk: (a)  $\tau = yt$ , (b)  $\int_0^t \tau^n (t - \tau)^m \, d\tau$ .

11. Carilah transformasi Laplace fungsi berikut dengan integral langsung

$$(a) \sin(t - a)u(t - a),$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} \cos(t - \pi) & t > \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases},$$

$$(c) f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 5 \\ 1 & 5 \leq t < 10 \\ 0 & 10 \leq t \end{cases}.$$

Jawab. (a)  $e^{-as} \frac{1}{s^2 + 1}$ , (b)  $e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 1}$ , (c)  $\frac{1}{s}(e^{-5s} - e^{-10s})$ .

12. Kerjakan soal sebelum ini dengan menggunakan operasi “*Shifting -t*” pada Tabel 3.2

13. Gunakan pecahan parsial untuk mencari invers transformasi Laplace ekspresi berikut

(a)  $\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{4}{s^2 - 4s} \right]$ , (b)  $\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 + 1)} \right]$ , (c)  $\mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} \right]$ ,

Jawab. (a)  $e^{4t} - 1$ , (b)  $1 - \cos t$ , (c)  $t - \sin t$ .

14. Kerjakan soal sebelumnya dengan menggunakan rumus

$$\mathfrak{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathfrak{L}[f(t)].$$

15. Gunakan ekspansi Heaviside untuk mengerjakan soal sebelumnya.

16. Gunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial berikut

(a)  $y'' + 2y' + y = 1$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$ ,

(b)  $y'' + y = \sin(3t)$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ .

Jawab. (a)  $y(t) = 1 + (1 - t)e^{-t}$ , (b)  $y(t) = \frac{3}{8} \sin t - \frac{1}{8} \sin 3t$ .

17. Gunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan berikut

$$\frac{dy}{dt} = 2y - 3z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -2y + z,$$

$$y(0) = 8, \quad z(0) = 3.$$

Jawab.  $y(t) = 3e^{4t} + 5e^{-t}$ ,  $z(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$ .

18. Carilah solusi persamaan integrodiferensial

$$y'(t) - \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 0, \quad y(0) = 1.$$

Jawab.  $y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$ .

19. Selesaikan persamaan berikut dengan kondisi awal pada  $t = 0$ , baik  $y$  dan turunannya sama dengan nol.

(a)  $y'' + 2y' + y = A\delta(t - t_0)$ ,

(b)  $y'''' - y = A\delta(t - t_0)$ .

Jawab. (a)  $y(t) = A(t - t_0)e^{-(t-t_0)}u(t - t_0)$ ,

(b)  $y(t) = \frac{1}{2}A[\sinh(t - t_0) - \sin(t - t_0)]u(t - t_0)$ .

20. Perhatikan hambatan  $R$  dan sebuah induktansi  $L$  dihubungkan seri dengan tegangan  $V(t)$ . Persamaan pembangkitan arusnya

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V(t).$$

Anggap  $i(0) = 0$  dan  $V(t)$  adalah tegangan impulsif pada  $t = t_0$  yang diberikan oleh

$$V(t) = A\delta(t - t_0).$$

Carilah arus dengan menggunakan metode transformasi Laplace.

Jawab.  $i(t) = \frac{A}{L} e^{-R(t-t_0)/L} u(t - t_0).$

21. Osilator harmonik teredam mengikuti persamaan

$$mx'' + bx' + kx = f(t); \quad \text{dengan } x(0) = x'(0) = 0.$$

- (a) Carilah solusi persamaan dengan konvolusi (Nyatakan  $x(t)$  sebagai integral).  
 (b) Jika  $f(t) = P\delta(t - t_0)$ , carilah solusinya dengan menghitung integral konvolusi.  
 (c) Jika  $b = 0$ , dan  $f(t) = F_0 \sin \omega_0 t$  dengan  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , selesaikan persamaan dengan transformasi Laplace.  
 (d) Jika  $b = 0$ , dan  $f(t) = F_0 u(t - t_0)$  dengan  $u(t - t_0)$  fungsi tangga, selesaikan persamaannya.

Jawab.(a)  $x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau) d\tau$

dengan  $\alpha = \frac{b}{2m}$ ,  $\omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$ ,

(b)  $x(t) = \frac{P}{m\omega} e^{-\alpha(t-t_0)} \sin \omega(t - t_0) u(t - t_0),$

(c)  $x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t),$

(d)  $x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} [1 - \cos \omega_0(t - t_0)] u(t - t_0).$

22. Gunakan inversi integral kompleks, carilah invers transformasi Laplace berikut.

(a)  $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$ , (b)  $\frac{1}{(s+2)^2}$ , (c)  $\frac{1}{(s^2+9)(s^2+4)}$ .

Jawab. (a)  $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$ , (b)  $t e^{-2t}$ , (c)  $\frac{1}{30}(3 \sin 2t - 2 \sin 3t)$ .

# Deret Fourier

Salah satu alat (tools) matematik yang sangat penting dan berguna adalah deret Fourier, dinamakan demikian karena ditemukan oleh seorang matematikawan sekaligus fisikawan berkebangsaan Perancis, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Analisis Fourier ini bisa ditemui hampir di semua bidang ilmu fisika (physical sciences).

Pada tahun 1822, Fourier yang saat itu bekerja pada bidang aliran panas membuat suatu pernyataan bahwa tiap fungsi  $f(x)$  dengan periode  $2\pi$  dapat dinyatakan dengan deret tak hingga trigonometrik dalam bentuk

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (4.1)$$

Kita tahu bahwa, dengan sedikit batasan pada fungsi, hal ini adalah kasus yang kita tinjau. Deret tak hingga dengan bentuk ini dinamakan sebagai deret Fourier. Deret ini pada awalnya digunakan untuk solusi persamaan diferensial parsial dengan syarat batas maupun kondisi awal. Selain tetap sebagai metode yang ampuh untuk persoalan seperti itu, kegunaannya bukan hanya untuk menyelesaikan konduksi panas. Deret Fourier sekarang merupakan alat yang esensial dalam analisis semua jenis gelombang, dari mulai pemrosesan sinyal sampai dengan fisika kuantum.

## 4.1 Deret Fourier untuk Fungsi Berperiode $2\pi$

### 4.1.1 Ortogonalitas Fungsi Trigonometrik

Dalam membicarakan deret Fourier, kita memerlukan integral berikut. Jika  $m$  dan  $n$  adalah bilangan bulat maka

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \quad (4.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx = 0, \quad (4.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \quad (4.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \neq 0, \\ 2\pi & m = n = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}. \quad (4.6)$$

Dua buah integral pertama trivial, baik dengan pengintegralan langsung maupun dengan menandai bahwa tiap fungsi trigonometrik yang diintegrasikan satu periode akan bernilai nol karena suku positif akan menghilangkan suku negatif. Sisa integralnya dapat dihitung dengan rumus perkalian trigonometri kemudian diintegrasikan. Cara paling mudah adalah menggunakan bentuk kompleks

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} dx.$$

Kita dapat melihat hasilnya tanpa benar-benar mengalikannya. Semua suku hasil perkalian memiliki bentuk  $e^{ikx}$ , dengan  $k$  sebuah bilangan bulat. Karena

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} [e^{ikx}]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

sehingga semua perkalian dalam integral hasilnya nol. Dengan cara yang sama

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} dx$$

secara identik nilainya nol kecuali  $n = m$ , dalam kasus ini

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx \, dx &= \frac{e^{i2mx} + 2 + e^{-i2mx}}{4} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 + \cos 2mx] \, dx = \begin{cases} \pi & m \neq 0, \\ 2\pi & m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama kita dapat membuktikan jika  $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$$

dan jika  $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos 2mx] \, dx = \pi.$$

Ini tidak lain adalah bukti (4.2)-(4.6).

Secara umum, jika dua buah anggota himpunan  $\psi_n, \psi_m$  dari himpunan fungsi  $\{\psi_i\}$  memenuhi kondisi

$$\int_a^b \psi_n(x) \psi_m(x) \, dx = 0 \quad \text{jika } n \neq m, \quad (4.7)$$

maka  $\psi_n$  dan  $\psi_m$  disebut ortogonal, dan (4.7) dinamakan sebagai kondisi ortogonalitas dalam selang antara  $a$  dan  $b$ . Himpunan  $\{\psi_i\}$  disebut himpunan ortogonal pada selang yang sama.

Sehingga jika himpunan fungsi trigonometrik adalah

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots,$$

maka ini merupakan himpunan ortogonal pada selang  $-\pi$  sampai  $\pi$ .

#### 4.1.2 Koefisien Fourier

Jika  $f(x)$  sebuah fungsi periodik berperiode  $2\pi$ , misalnya

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

dan dinyatakan dengan deret Fourier dalam bentuk (4.1), koefisien  $a_n$  dan  $b_n$  dapat dicari dengan cara berikut.

Kalikan kedua ruas (4.1) dengan  $\cos mx$ , dengan  $m$  bilangan bulat positif

$$f(x) \cos mx = \frac{1}{2}a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx).$$

Deret ini dapat diintegrasikan suku per suku

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx. \end{aligned}$$

Dari integral yang sudah kita bicarakan, semua suku yang berhubungan dengan  $b_n$  hilang dan yang berhubungan dengan  $a_n$  juga akan hilang kecuali untuk  $n = m$ , suku tersebut diberikan oleh

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi & m = 0 \\ a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = a_m\pi & m \neq 0 \end{cases}.$$

Hubungan ini mengizinkan kita untuk menghitung koefisien  $a_m$  sebarang yang diinginkan termasuk  $a_0$  ketika fungsi  $f(x)$  diketahui.

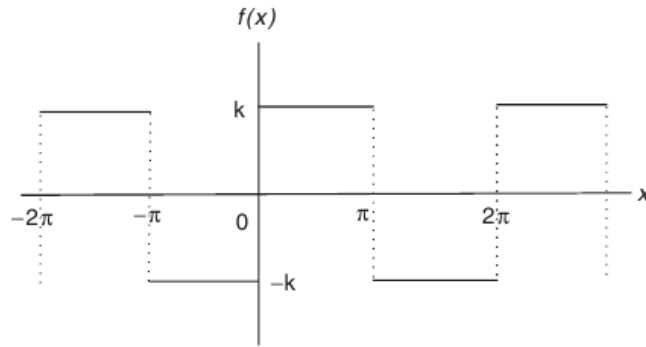
Koefisien  $b_m$  juga dapat dicari dengan cara yang sama. Ekspansi tersebut dikalikan dengan  $\sin mx$  dan diintegrasikan suku per suku. Hubungan ortogonalitas memberikan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = b_m\pi.$$

Karena  $m$  dapat berupa bilangan bulat sebarang, dari sini diperoleh  $a_m$  (termasuk  $a_0$ ) dan  $b_n$  diberikan oleh:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (4.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (4.9)$$



Gambar 4.1: Fungsi gelombang persegi.

Koefisien ini dikenal sebagai rumus Euler untuk koefisien Fourier, atau sederhananya koefisien Fourier.

Esensinya, deret Fourier mendekomposisi fungsi periodik menjadi gelombang cosinus dan sinus. Dari prosedur, kita dapat mengamati:

- Suku pertama  $a_0/2$  merepresentasikan nilai rata-rata  $f(x)$  pada periode  $2\pi$ .
- Suku  $a_n \cos nx$  merepresentasikan gelombang cosinus dengan amplitudo  $a_n$ . Dalam satu periode  $2\pi$ , terdapat gelombang cosinus lengkap sebanyak  $n$ .
- Suku  $b_n \sin nx$  merepresentasikan gelombang sinus dengan amplitudo  $b_n$ . Dalam satu periode  $2\pi$ , terdapat gelombang sinus lengkap sebanyak  $n$ .
- Secara umum  $a_n$  dan  $b_n$  diharapkan turun ketika  $n$  naik.

### 4.1.3 Ekspansi sebuah Fungsi dalam Deret Fourier

Sebelum kita membicarakan validitas deret Fourier, marilah kita menggunakan contoh berikut untuk menunjukkan kemungkinan merepresentasikan fungsi periodik berperiode  $2\pi$  dengan deret Fourier, dengan mengambil suku secukupnya.

Anggap kita ingin mengekspansikan fungsi gelombang persegi seperti pada Gambar 4.1, menjadi deret Fourier Fungsi ini merupakan fungsi periodik berperiode  $2\pi$ , yang dapat didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Untuk mencari koefisien deret Fourier dari fungsi ini

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$



selalu menjadi sebuah ide yang bagus untuk menghitung  $a_0$  secara terpisah karena diberikan oleh integral yang sederhana. Dalam kasus ini

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

dapat dilihat tanpa integrasi, karena luas di bawah kurva  $f(x)$  antara  $-\pi$  sampai  $\pi$  adalah nol. Koefisien yang lain, diberikan oleh (4.8) dan (4.9). Untuk menghitung integral ini, kita harus memisahkan masing-masing menjadi dua buah integral karena  $f(x)$  didefinisikan berbeda dalam dua interval yaitu  $(-\pi, 0)$  dan  $(0, \pi)$ . Dari (4.8)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} k \cos nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ -k \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[ k \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dari (4.9)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ k \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[ -k \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \right\} = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos nx) \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ 0 & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dengan koefisien ini, deret Fouriernya menjadi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4k}{\pi} \sum_{n \text{ ganjil}} \frac{1}{n} \sin nx \\ &= \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Kita juga dapat menuliskannya sebagai

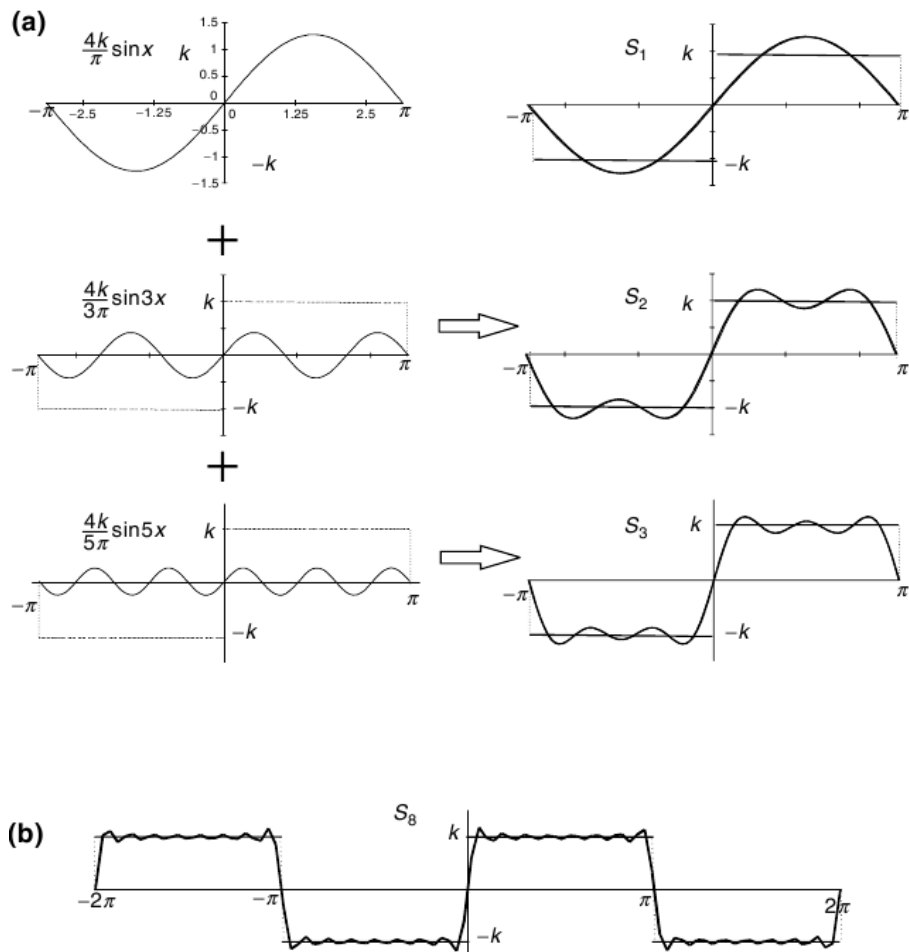
$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x.$$

Untuk menguji konvergensinya, marilah kita mendefinisikan jumlah parsial sebagai

$$S_N = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x.$$

Dengan kata lain,  $S_N$  adalah jumlah  $N$  suku pertama dari deret Fourier.  $S_1$  adalah suku pertama  $(4k/\pi) \sin x$ ,  $S_2$  adalah jumlah dua buah suku pertama  $(4k/\pi)(\sin x + (1/3) \sin 3x)$  dan lain sebagainya.

Dalam Gambar 4.2(a) tiga buah jumlah parsial pertama bisa dilihat di kolom kanan, masing-masing suku terdapat pada kolom kiri. Terlihat jelas bahwa  $S_N$  mendekati  $f(x)$  ketika  $N$  membesar meskipun kontribusi masing-masing suku semakin kecil ketika  $n$  membesar.



Gambar 4.2: Konvergensi dari ekspansi deret Fourier. (a)

Tiga buah jumlah parsial pertama pada kolom kanan, masing-masing sukunya ada di kiri.

(b) Jumlah delapan suku pertama deret Fourier dari fungsi tersebut.

Dalam Gambar 4.2(b) terlihat hasil dari  $S_8$ . Dengan delapan buah suku, jumlah parsial sudah mirip dengan fungsi gelombang persegi. Kita melihat pada titik diskontinu,  $x = -\pi, x = 0$  dan  $x = \pi$ , semua jumlah parsial memiliki nilai nol, yang merupakan nilai rata-rata fungsi dari  $-k$  ke  $k$ . Perhatikan juga  $x$  mendekati diskontinuitas  $f(x)$  dari kedua sisi, nilai  $S_N(x)$  cenderung melebihi nilai  $f(x)$ , dalam kasus ini  $-k$  dan  $k$ . Ketika  $N$  naik, kelebihan nilai (sekitar 9% dari diskontinuitas) didorong semakin mendekati titik diskontinuitas, dan tidak akan hilang meskipun  $N$  menuju tak hingga. Perilaku deret Fourier dekat pada titik diskontinu ini dikenal sebagai fenomena Gibbs.

## 4.2 Konvergensi Deret Fourier

### 4.2.1 Kondisi Dirichlet

Kondisi agar  $f(x)$  memenuhi (4.1) dinyatakan dengan teorema berikut.

**Teorema 4.2.1.** *Jika sebuah fungsi periodik  $f(x)$  berperiode  $2\pi$  terikat dan kontinu dan memiliki jumlah titik maksimum dan minimum berhingga pada tiap periode, maka deret trigonometrik*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

konvergen pada  $f(x)$  dengan  $f(x)$  kontinu, dan deret ini konvergen pada rata-rata limit kiri dan kanan dari  $f(x)$  pada titik diskontinu.

Bukti dari teorema ini bisa dilihat pada G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, New York, 1976.

Sepanjang  $f(t)$  periodik, pemilihan batas integrasi simetrik  $(-\pi, \pi)$  tidaklah penting. Selang  $2\pi$  lain seperti  $(x_0, x_0 + 2\pi)$  juga akan memberikan hasil yang sama.

Kondisi konvergensi ini pertama kali dibuktikan oleh matematikawan berkebangsaan Jerman P.G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), sehingga dikenal sebagai kondisi Dirichlet. Kondisi ini hanya memaksa sedikit batasan pada fungsi. Selanjutnya hal ini hanyalah kondisi (syarat) cukup. Kita juga tahu beberapa fungsi yang tidak memenuhi kondisi ini dapat direpresentasikan dalam deret Fourier. Kondisi minimum yang diperlukan untuk konvergensinya tidak diketahui. Dalam kasus sebarang, kita dapat mengasumsikan bahwa setiap fungsi yang kita pelajari dapat direpresentasikan dalam deret Fourier.

### 4.2.2 Deret Fourier dan Fungsi Delta

Dibandingkan membuktikan teorema konvergensi, kita akan menggunakan fungsi delta untuk mendemonstrasikan deret Fourier

$$S_{\infty}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergen pada  $f(x)$ .

Dengan  $a_n$  dan  $b_n$  diberikan pada (4.8) dan (4.9),  $S_{\infty}(x)$  dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} S_{\infty}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') dx' + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \cos nx' dx' \right) \cos nx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \sin nx' dx' \right) \sin nx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx' \cos nx + \sin nx' \sin nx) \right] dx' \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x' - x) \right] dx'. \end{aligned}$$

Jika deret cosinus

$$D(x' - x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x' - x)$$

berperilaku seperti fungsi delta  $\delta(x' - x)$ , maka  $S_{\infty}(x) = f(x)$  karena

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x) \quad \text{untuk} \quad -\pi < x < \pi.$$

Ingat bahwa fungsi delta  $\delta(x' - x)$

$$\delta(x' - x) = \begin{cases} 0, & x' \neq x \\ \infty, & x' = x \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x' - x) dx' = 1 \quad \text{untuk} \quad -\pi < x < \pi.$$

Sekarang kita akan membuktikan bahwa  $D(x' - x)$  memiliki sifat-sifat ini. Pertama untuk meyakinkan konvergensi, kita menuliskan deret cosinus sebagai

$$\begin{aligned} D(x' - x) &= \lim_{\gamma \rightarrow 1^-} D_{\gamma}(x' - x), \\ D_{\gamma}(x' - x) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \cos n(x' - x) \right], \end{aligned}$$

dengan limit  $\gamma \rightarrow 1^-$  berarti  $\gamma$  mendekati 1 dari bawah, yang berarti  $\gamma$  mendekati satu, tetapi selalu lebih kecil dari 1. Untuk menjumlahkan deret ini, akan lebih menguntungkan untuk melihat  $D_{\gamma}(x' - x)$  sebagai bagian riil deret kompleks

$$D_{\gamma}(x' - x) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n e^{in(x'-x)} \right) \right].$$

Karena

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \gamma e^{i(x'-x)}} &= 1 + \gamma e^{i(x'-x)} + \gamma^2 e^{i2(x'-x)} + \dots \\ \frac{\gamma e^{i(x'-x)}}{1 - \gamma e^{i(x'-x)}} &= \gamma e^{i(x'-x)} + \gamma^2 e^{i2(x'-x)} + \gamma^3 e^{i3(x'-x)} + \dots,\end{aligned}$$

jadi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n e^{in(x'-x)} &= \frac{1}{2} + \frac{\gamma e^{i(x'-x)}}{1 - \gamma e^{i(x'-x)}} \\ &= \frac{1 + \gamma e^{i(x'-x)}}{2(1 - \gamma e^{i(x'-x)})} = \frac{1 + \gamma e^{i(x'-x)}}{2(1 - \gamma e^{i(x'-x)})} \frac{1 - \gamma e^{i(x'-x)}}{1 - \gamma e^{i(x'-x)}} \\ &= \frac{1 - \gamma^2 + \gamma e^{i(x'-x)} - \gamma e^{-i(x'-x)}}{2[1 - \gamma(e^{i(x'-x)} + e^{-i(x'-x)}) + \gamma^2]} = \frac{1 - \gamma^2 + i2\gamma \sin(x' - x)}{2[1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]}\end{aligned}$$

maka dengan demikian

$$\begin{aligned}D_\gamma(x' - x) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1 - \gamma^2 + i2\gamma \sin(x' - x)}{2\pi [1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]} \right] \\ &= \frac{1 - \gamma^2}{2\pi [1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]}.\end{aligned}$$

Jelas bahwa, jika  $x' \neq x$

$$D(x' - x) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{1 - \gamma^2}{2\pi [1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]} = 0.$$

Jika  $x' = x$ , maka  $\cos(x' - x) = 1$ , dan

$$\begin{aligned}\frac{1 - \gamma^2}{2\pi [1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]} &= \frac{1 - \gamma^2}{2\pi [1 - 2\gamma + \gamma^2]} \\ &= \frac{(1 - \gamma)(1 + \gamma)}{2\pi [1 - \gamma]^2} = \frac{1 + \gamma}{2\pi(1 - \gamma)}.\end{aligned}$$

Dari sini

$$D(x' - x) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{1 + \gamma}{2\pi(1 - \gamma)} \rightarrow \infty, \quad x' = x.$$

Lebih dari itu

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_\gamma(x' - x) dx' = \frac{1 - \gamma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx'}{(1 + \gamma^2) - 2\gamma \cos(x' - x)}.$$

Dalam teori residu

$$\oint \frac{d\theta}{a - b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b.$$

dengan substitusi  $x' - x = \theta$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx'}{(1 + \gamma^2) - 2\gamma \cos(x' - x)} = \oint \frac{d\theta}{(1 + \gamma^2) - 2\gamma \cos \theta}.$$

Sepanjang  $\gamma$  tidak tepat 1,  $1 + \gamma^2 > 2\gamma$ , maka

$$\oint \frac{d\theta}{(1 + \gamma^2) - 2\gamma \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{(1 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2}} = \frac{2\pi}{1 - \gamma^2}.$$

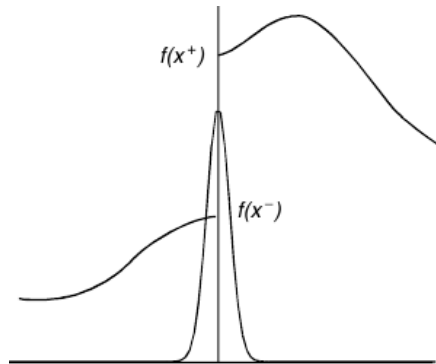
sehingga

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_{\gamma}(x' - x) dx' = \frac{1 - \gamma^2}{2\pi} \frac{2\pi}{1 - \gamma^2} = 1.$$

Hal ini adalah pembuktian kita bahwa  $D(x' - x)$  berperilaku seperti fungsi delta  $\delta(x' - x)$ . Sehingga jika  $f(x)$  kontinu maka deret Fourier konvergen pada  $f(x)$

$$S_{\infty}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x') D(x' - x) dx' = f(x).$$

Anggap bahwa  $f(x)$  diskontinu pada beberapa titik  $x$ , sehingga  $f(x^+)$  dan  $f(x^-)$  adalah nilai limit ketika kita mendekati dari kanan dan kiri. Sehingga dalam menghitung integral terakhir, separuh  $D(x' - x)$  dikalikan dengan  $f(x^+)$  dan separuhnya dengan  $f(x^-)$ , sebagaimana gambar berikut



Sehingga persamaan terakhir menjadi

$$S_{\infty}(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)].$$

Maka pada titik-titik  $f(x)$  kontinu, deret Fourier memberikan nilai  $f(x)$  dan pada titik-titik diskontinu deret Fourier memberikan nilai rata-rata limit kanan dan kiri dari  $f(x)$ .

## 4.3 Deret Fourier Fungsi Berperiode Sebarang

### 4.3.1 Penggantian Interval

Sejauh ini perhatian kita terbatas pada fungsi dengan periode  $2\pi$ . Batasan ini dapat dengan mudah kita rubah. Jika  $f(t)$  periodik berperiode  $2L$ , kita dapat melakukan perubahan variabel

$$t = \frac{L}{\pi} x$$

dan misalkan

$$f(x) = f\left(\frac{L}{\pi} x\right) \equiv F(x).$$

Dengan definisi ini

$$f(t + 2L) = f\left(\frac{L}{\pi} x + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi} [x + 2\pi]\right) = F(x + 2\pi).$$

Karena  $f(t)$  fungsi periodik berperiode  $2L$

$$f(t + 2L) = f(t)$$

dari sini

$$F(x + 2\pi) = F(x).$$

Sehingga  $F(x)$  periodik berperiode  $2\pi$ .

Kita dapat mengekspansikan  $F(x)$  menjadi deret Fourier dan mentransformasikan kembali menjadi fungsi  $t$

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4.11)$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx.$$

Karena  $x = \frac{\pi}{L}t$ , dan  $F(x) = f(t)$  maka (4.11) dapat dituliskan

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L}t + b_n \sin \frac{n\pi}{L}t \right), \quad (4.12)$$

dan koefisiennya juga dapat kita nyatakan dalam integral terhadap  $t$ . Dengan merubah variabel integrasi dari  $x$  menjadi  $t$  dan  $dx = \frac{\pi}{L} dt$ , kita mempunyai

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left( \frac{n\pi}{L}t \right) dt, \quad (4.13)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \left( \frac{n\pi}{L}t \right) dt. \quad (4.14)$$

### Metode Kronecker

Dalam praktek, kita sering menjumpai  $f(t)$  memiliki bentuk  $t^k$ ,  $\sin kt$ ,  $\cos kt$  atau  $e^{kt}$  untuk beberapa nilai bilangan bulat  $k$ . Sehingga kita harus mengintegrasikan jenis

$$\int t^k \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \int \sin kt \cos \frac{n\pi t}{L} dt.$$

Integral ini dapat dihitung dengan integral parsial yang berulang. Pendekatan sistematis berikut memudahkan pekerjaan kita dalam menghitung secara detil. Perhatikan integral berikut

$$\int f(t)g(t) dt$$

dan misalkan

$$g(t) dt = dG(t), \quad \text{maka} \quad G(t) = \int g(t) dt.$$

Dengan integral parsial

$$\int f(t)g(t) dt = f(t)G(t) - \int f'(t)G(t) dt.$$

Jika kita lanjutkan prosesnya

$$G_1(t) = \int G(t) dt, G_2(t) = \int G_1(t) dt, \dots, G_n(t) = \int G_{n-1}(t) dt,$$

kita mempunyai

$$\int f(t)g(t) dt = f(t)G(t) - f'(t)G_1(t) + \int f''(t)G_1(t) dt \quad (4.15)$$

$$= f(t)G(t) - f'(t)G_1(t) + f''(t)G_2(t) - f'''(t)G_3(t) + \dots \quad (4.16)$$

Prosedur ini dikenal sebagai metode Kronecker.

Sekarang jika  $f(t) = t^k$  maka

$$f'(t) = kt^{k-1}, \dots, f^k(t) = k!, f^{k+1}(t) = 0,$$

ekspresi di atas akan berhenti. Selanjutnya jika  $g(t) = \cos \frac{n\pi t}{L}$ , maka

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \left(\frac{L}{n\pi}\right) \sin \frac{n\pi t}{L} \\ G_1(t) &= \left(\frac{L}{n\pi}\right) \int \sin \frac{n\pi t}{L} dt = -\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos \frac{n\pi t}{L} \\ G_2(t) &= -\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 \sin \frac{n\pi t}{L}, \quad G_3(t) = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 \cos \frac{n\pi t}{L}, \dots \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, jika  $g(t) = \sin \frac{n\pi t}{L}$ , maka

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \sin \frac{n\pi t}{L} dt = -\left(\frac{L}{n\pi}\right) \cos \frac{n\pi t}{L}, \\ G_1(t) &= -\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi t}{L}, \\ G_2(t) &= \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 \cos \frac{n\pi t}{L}, \quad G_3(t) = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \int_a^b t^k \cos \frac{n\pi t}{L} dt &= \left[ \frac{L}{n\pi} t^k \sin \frac{n\pi t}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 kt^{k-1} \cos \frac{n\pi t}{L} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 k(k-1)t^{k-2} \sin \frac{n\pi t}{L} + \dots \right]_a^b \quad (4.17) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \int_a^b t^k \sin \frac{n\pi t}{L} dt &= \left[ -\frac{L}{n\pi} t^k \cos \frac{n\pi t}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 kt^{k-1} \sin \frac{n\pi t}{L} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 k(k-1)t^{k-2} \cos \frac{n\pi t}{L} + \dots \right]_a^b. \quad (4.18) \end{aligned}$$



Jika  $f(t) = \sin kt$ , maka

$$f'(t) = k \cos kt, \quad f''(t) = -k^2 \sin kt.$$

kita dapat menggunakan (4.15) untuk menuliskan

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin kt \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt &= \left[ \frac{L}{n\pi} \sin kt \sin \frac{n\pi t}{L} + k \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \cos kt \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_a^b \\ &\quad + k^2 \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \int_a^b \sin kt \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt. \end{aligned}$$

Dengan mengkombinasikan suku terakhir dengan ruas kiri

$$\begin{aligned} &\left[ 1 - k^2 \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \right] \int_a^b \sin kt \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt \\ &= \left[ \frac{L}{n\pi} \sin kt \sin \frac{n\pi t}{L} + k \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \cos kt \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_a^b \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} &\int_a^b \sin kt \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt \\ &= \frac{(n\pi)^2}{(n\pi)^2 - (kL)^2} \left[ \frac{L}{n\pi} \sin kt \sin \frac{n\pi t}{L} + k \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \cos kt \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_a^b. \end{aligned}$$

Jelas integral seperti

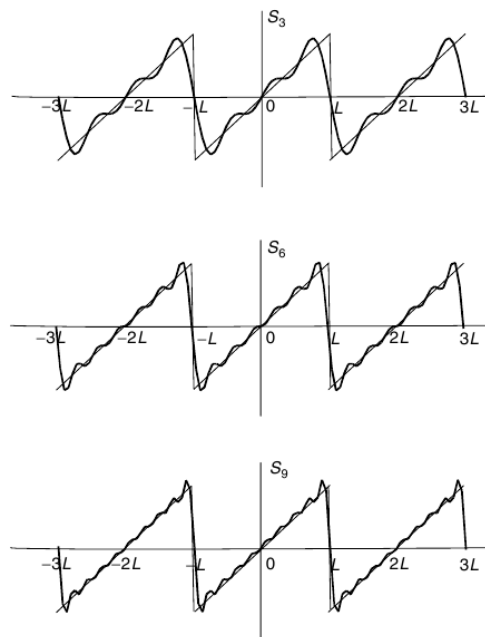
$$\begin{aligned} &\int_a^b \sin kt \sin \frac{n\pi}{L} t \, dt, \quad \int_a^b \cos kt \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt, \quad \int_a^b \cos kt \sin \frac{n\pi}{L} t \, dt \\ &\int_a^b e^{kt} \cos \frac{n\pi}{L} t \, dt, \quad \int_a^b e^{kt} \sin \frac{n\pi}{L} t \, dt \end{aligned}$$

**Contoh 4.3.1.** Carilah deret Fourier fungsi  $f(t)$  berikut

$$f(t) = t \text{ untuk } -L < t \leq L, \quad \text{dan} \quad f(t + 2L) = f(t).$$

**Solusi 4.3.1.**

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L t \, dt = 0, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L t \cos \frac{n\pi t}{L} \, dt = \frac{1}{L} \left[ \frac{L}{n\pi} t \sin \frac{n\pi t}{L} + \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_{-L}^L = 0, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L t \sin \frac{n\pi t}{L} \, dt \\ &= \frac{1}{L} \left[ -\frac{L}{n\pi} t \cos \frac{n\pi t}{L} + \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi t}{L} \right]_{-L}^L = -\frac{2L}{n\pi} \cos n\pi. \end{aligned}$$



Gambar 4.3: Konvergensi deret Fourier sebuah fungsi periodik yang definisi satu periodenya  $f(t) = t$ ,  $-L < t < L$ .  $N$  suku pertama aproksimasinya ditunjukkan sebagai  $S_N$ .

Maka

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \cos n\pi \sin \frac{n\pi t}{L} = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{2L}{\pi} \left( \sin \frac{\pi t}{L} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi t}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{L} - \dots \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Konvergensinya dapat dilihat pada Gambar 4.3 dengan  $S_N$  adalah jumlah parsial yang didefinisikan sebagai

$$S_N = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{L}$$

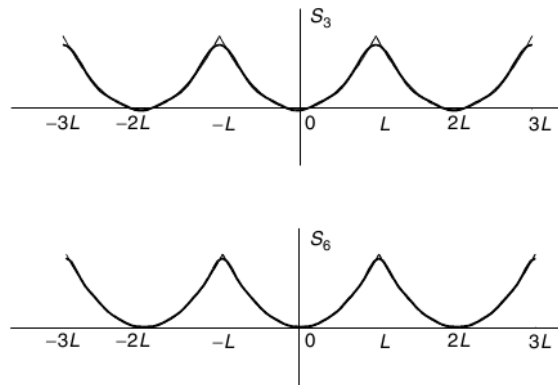
Perhatikan bahwa akurasi meningkat seiring banyaknya suku yang dilibatkan. Dengan tiga buah suku,  $S_3$  sudah menyerupai fungsi. Kecuali untuk fenomena Gibbs, aproksimasi yang baik diperoleh untuk  $S_9$ .

**Contoh 4.3.2.** Carilah deret Fourier fungsi  $f(t)$  berikut

$$f(t) = t^2 \text{ untuk } -L < t \leq L, \text{ dan } f(t+2L) = f(t)$$

**Solusi 4.3.2.** Koefisien Fouriernya diberikan oleh

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L t^2 dt = \frac{1}{L} \frac{1}{3} [L^3 - (-L)^3] = \frac{2}{3} L^2$$



Gambar 4.4: Konvergensi deret Fourier sebuah fungsi periodik yang definisi satu periodenya  $f(t) = t^2$ ,  $-L < t < L$ . Jumlah parsial  $S_3$  sudah merupakan aproksimasi yang baik.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L t^2 \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n \neq 0 \\
 &= \frac{1}{L} \left[ \frac{L}{n\pi} t^2 \sin \frac{n\pi t}{L} + \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 2t \cos \frac{n\pi t}{L} - \left( \frac{L}{n\pi} \right)^3 2 \sin \frac{n\pi t}{L} \right]_{-L}^L \\
 &= \frac{2L}{(n\pi)^2} [L \cos n\pi + L \cos(-n\pi)] = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n,
 \end{aligned}$$

dan

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L t^2 \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0.$$

Sehingga ekspansi Fouriernya

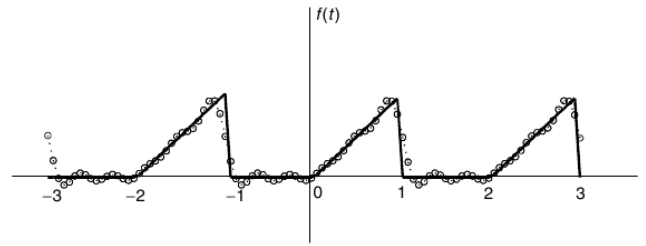
$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L} \\
 &= \frac{L^2}{3} - \frac{4L^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi}{L} t - \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{L} t + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi}{L} t + \dots \right). \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Dengan jumlah parsial yang didefinisikan sebagai

$$S_N = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L},$$

kita membandingkan  $S_3$ ,  $S_6$  dengan  $f(t)$  pada Gambar 4.4.

Jelas terlihat bahwa  $S_3$  sudah merupakan aproksimasi yang sangat baik. Perbedaan antara  $S_6$  dan  $f(x)$  sulit untuk dicari. Deret Fourier ini lebih cepat konvergen dibandingkan dengan contoh sebelumnya. Perbedaannya adalah  $f(t)$  dalam soal ini kontinu bukan hanya pada satu periode tetapi juga pada selang yang lebih lebar, sedangkan  $f(t)$  pada contoh sebelumnya diskontinu pada selang yang diperlebar.



Gambar 4.5: Fungsi periodik (4.21) ditunjukkan bersama dengan jumlah parsial  $S_5$  dari deret Fourier. Fungsinya ditunjukkan dengan garis penuh dan  $S_5$  sebagai garis lingkaran kecil.

**Contoh 4.3.3.** Carilah deret Fourier fungsi periodik yang definisinya dalam satu periode

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -1 < t < 0 \\ t & 0 < t < 1 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t) \quad (4.21)$$

**Solusi 4.3.3.** Periodeitas  $2L$  fungsi ini adalah 2, sehingga  $L = 1$ , dan deret Fouriernya diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)]$$

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \int_{-1}^1 f(t) \cos(n\pi t) dt = \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt, \\ b_n &= \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt = \int_0^1 t \sin(n\pi t) dt. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan (4.17) dan (4.18) kita mempunyai

$$\begin{aligned} a_n &= \left[ \frac{1}{n\pi} t \sin n\pi t + \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi t \right]_0^1 = \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi - \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \\ b_n &= \left[ -\frac{1}{n\pi} t \cos n\pi t + \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \sin n\pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi = -\frac{(-1)^n}{n\pi}. \end{aligned}$$

Maka deret Fourier untuk fungsi ini adalah  $f(t) = S_{\infty}$ , dengan

$$S_N = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^N \left[ \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \cos n\pi t - \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi t \right].$$

Pada Gambar 4.5 fungsi ini diaproksimasi dengan  $S_5$  yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi t - \frac{2}{9\pi^2} \cos 3\pi t - \frac{2}{25\pi^2} \cos 5\pi t \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{1}{3\pi} \sin 3\pi t - \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi t + \frac{1}{5\pi} \sin 5\pi t. \end{aligned}$$

Konvergensi deret ini tidak begitu cepat, tetapi jelas dengan jumlah suku yang cukup, deret Fourier memberikan representasi akurat dari fungsi ini.

### 4.3.2 Deret Fourier untuk Fungsi Genap dan Ganjil

Jika  $f(t)$  merupakan fungsi genap yakni

$$f(-t) = f(t),$$

sehingga deret Fouriernya hanya mengandung suku cosinus saja. Hal ini bisa kita lihat sebagai berikut. Koefisien  $b_n$  dapat dituliskan sebagai

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(s) \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt. \quad (4.22)$$

Jika kita merubah variabel dan memisalkan  $s = -t$ , integral pertama pada ruas kanan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(s) \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(-t) \sin\left(-\frac{n\pi}{L}t\right) d(-t) \\ &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \end{aligned}$$

karena  $\sin(-x) = -\sin(x)$  dan  $f(-x) = f(x)$ . Tetapi

$$\frac{1}{L} \int_L^0 f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt = -\frac{1}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt,$$

yang merupakan negatif dari integral kedua ruas kanan dari (4.22). Sehingga  $b_n = 0$  untuk semua  $n$ .

Dengan cara yang sama dan  $\cos(-x) = \cos(x)$ , kita memperoleh:

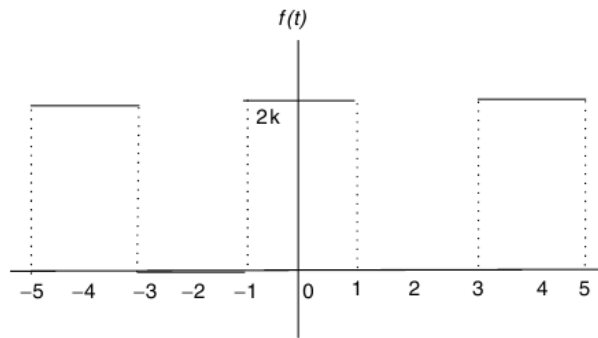
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(s) \cos\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \\ &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(-t) \cos\left(-\frac{n\pi}{L}t\right) d(-t) + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \\ &= -\frac{1}{L} \int_L^0 f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Maka

$$f(t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(t') dt' + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(t') \cos\left(\frac{n\pi}{L}t'\right) dt' \right] \cos \frac{n\pi}{L}t. \quad (4.24)$$

Dengan cara yang sama, jika  $f(t)$  fungsi ganjil

$$f(-t) = -f(t),$$



Gambar 4.6: Fungsi gelombang persegi genap.

maka

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(t') \sin\left(\frac{n\pi}{L}t'\right) dt' \right] \sin \frac{n\pi}{L}t. \quad (4.25)$$

Dalam contoh sebelumnya, fungsi periodik pada Gambar 4.3 adalah fungsi ganjil, maka ekspansi Fouriernya adalah deret sinus. Pada Gambar 4.4 fungsinya adalah fungsi genap, sehingga ekspansinya adalah deret cosinus. Pada Gambar 4.5, fungsinya tidak memiliki simetri, sehingga ekspansinya mengandung suku sinus dan cosinus.

**Contoh 4.3.4.** Carilah deret Fourier fungsi yang ditunjukkan pada Gambar 4.6. **Solusi 4.3.4.** Fungsi pada Gambar 4.6 dapat dinyatakan sebagai

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{jika } -2 < t < -1 \\ 2k & \text{jika } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{jika } 1 < t < 2 \end{cases}, \quad f(t) = f(t+4).$$

Periode fungsi  $2L$  sama dengan 4 sehingga  $L = 2$ . Selanjutnya fungsinya adalah fungsi genap, maka deret Fouriernya adalah deret cosinus, semua koefisien untuk suku sinus nilainya nol

$$b_n = 0.$$

Koefisien untuk deret cosinus diberikan oleh

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 2k dt = 2k,$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \int_0^1 2k \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{4k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Maka deret Fourier  $f(t)$  adalah

$$f(t) = k + \frac{4k}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2}t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2}t + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2}t - \dots \right) \quad (4.26)$$

Sekarang kita bandingkan Gambar 4.6 dengan Gambar 4.1. Gambar 4.6 merepresentasikan fungsi genap yang ekspansi Fouriernya adalah deret cosinus, sedangkan pada Gambar 4.1 adalah fungsi ganjil yang ekspansi Fouriernya adalah deret sinus. Jelas keduanya memiliki hubungan. Dua buah gambar tersebut dapat kita buat bersinggungan jika (a) kita menggeser sumbu- $y$  pada Gambar 4.6 satu satuan ke kiri (dari  $t = 0$  ke  $t = -1$ ), (b) kita mengganti variabel sehingga periodisitas berubah dari 4 menjadi  $2\pi$ , (c) geser 4.6 ke bawah sebesar  $k$ .

Perubahan deret Fouriernya karena operasi tersebut adalah sebagai berikut. Pertama, misalkan  $t' = t + 1$ , sehingga  $t = t' - 1$  pada (4.26)

$$f(t) = k + \frac{4k}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2}(t' - 1) - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2}(t' - 1) + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2}(t' - 1) - \dots \right).$$

Karena

$$\cos \frac{n\pi}{2}(t' - 1) = \cos \left( \frac{n\pi}{2}t' - \frac{n\pi}{2} \right) = \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{2}t' & n = 1, 5, 9, \dots \\ -\sin \frac{n\pi}{2}t' & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases},$$

$f(t)$  jika dinyatakan dalam  $t'$  menjadi

$$f(t) = k + \frac{4\pi}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2}t' + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2}t' + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2}t' - \dots \right) = g(t').$$

Ekspresi ini kita nyatakan dengan  $g(t')$ , dan masih memiliki periode sebesar 4. Sekarang kita rubah variabel  $t' = 2x/\pi$  sehingga fungsi yang dinyatakan dalam  $x$  memiliki periode  $2\pi$

$$\begin{aligned} g(t') &= k + \frac{4k}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} \left( \frac{2x}{\pi} \right) + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} \left( \frac{2x}{\pi} \right) + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} \left( \frac{2x}{\pi} \right) - \dots \right) \\ &= k + \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots \right) = h(x). \end{aligned}$$

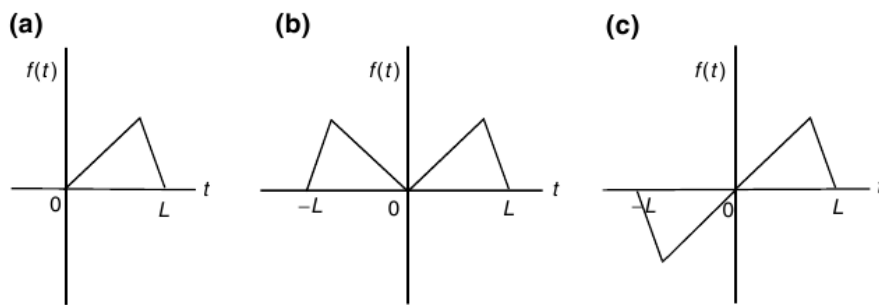
Terakhir kita geser ke bawah sebesar  $k$ , kita memiliki

$$h(x) - k = \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots \right).$$

Ini tidak lain adalah deret Fourieier (4.10) untuk fungsi ganjil pada Gambar 4.1.

## 4.4 Deret Fourier Fungsi Nonperiodik pada Selang Terbatas

Sejauh ini kita hanya memperhatikan fungsi periodik dari  $-\infty$  ke  $\infty$ . Dalam aplikasi fisis, kita biasanya hanya tertarik pada nilai fungsi untuk selang yang terbatas. Dalam selang tersebut fungsi mungkin tidak periodik. Sebagai contoh, yaitu ketika kita mempelajari tali dengan kedua ujung tetap. Tidak terdapat kondisi periodik pada kasus fisis yang ditinjau, tetapi juga tidak terdapat hal menarik untuk fungsi di luar panjang tali. Analisis Fourier tetap dapat digunakan untuk persoalan ini, karena kita masih bisa meneruskan fungsinya di luar selang yang diinginkan untuk membuatnya periodik.



Gambar 4.7: Ekstensi sebuah fungsi. (a) Fungsi hanya terdefinisi antara 0 dengan  $L$ . (b) Ekstensi simetrik memberikan fungsi genap berperiode  $2L$ . (c) Ekstensi antisimetrik memberikan fungsi ganjil berperiode  $2L$

Anggap bahwa selang yang kita tinjau dari sebuah fungsi  $f(t)$  yang ditunjukkan pada Gambar 4.7(a) adalah dari 0 sampai  $L$ . Kita dapat memperluas selangnya dari  $-L$  sampai 0 dengan cara yang kita sukai. Jika kita memperluasnya secara simetrik seperti pada bagian (b), sehingga pada semua garis riil, kondisi periodik  $f(t + 2L) = f(t)$ , sebuah deret Fourier hanya dengan suku cosinus dapat ditemukan untuk fungsi genap. Perluasan seperti bagaian (c) memungkinkan kita mencari deret Fourier untuk fungsi ganjil. Dua buah deret tersebut akan konvergen pada  $f(t)$  dalam interval 0 sampai  $L$ . Ekspansi (perluasan) deret seperti ini dinamakan ekspansi setengah selang (*half-range expansion*). Untuk lebih jelasnya kita lihat contoh berikut.

**Contoh 4.4.1.** Fungsi  $f(t)$  hanya terdefinisi pada  $0 < t < 1$  yaitu

$$f(t) = t - t^2.$$

Carilah ekspansi Fourier cosinus dan sinus setengah selang.

**Solusi 4.4.1.** (a). Misalkan interval  $(0,1)$  adalah setengah periode fungsi yang diperluas simetrik, sehingga  $2L = 2$  atau  $L = 1$ . Ekspansi setengah selang fungsi genap ini adalah deret cosinus

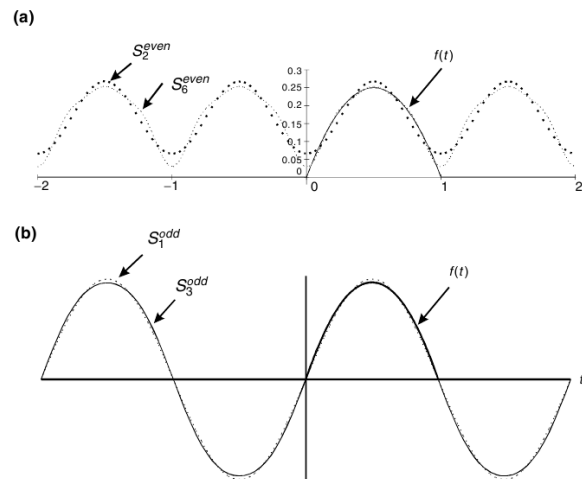
$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos n\pi t$$

dengan

$$a_0 = 2 \int_0^1 (t - t^2) dt = \frac{1}{3},$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \cos n\pi t dt, \quad n \neq 0.$$





Gambar 4.8: Konvergensi deret setengah-selang. Fungsi  $f(t) = t - t^2$  diberikan antara 0 dan 1. Baik cosinus maupun sinus sama-sama konvergen pada fungsi dalam selang ini. Tetapi di luar ini, deret cosinus konvergen pada fungsi genap seperti pada (a) dan deret sinus konvergen pada fungsi ganjil seperti pada (b).  $S_2^{\text{genap}}$  dan  $S_6^{\text{genap}}$  adalah aproksimasi dua dan empat suku dari deret cosinus.  $S_1^{\text{ganjil}}$  dan  $S_3^{\text{ganjil}}$  adalah aproksimasi satu dan dua suku dari deret sinus.

Dengan metode Kronecker, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt &= \left[ \frac{1}{n\pi} t \sin n\pi t + \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi t \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 (\cos n\pi - 1) \\ \int_0^1 t^2 \cos n\pi t \, dt &= \left[ \frac{1}{n\pi} t^2 n \sin \pi t + \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 2t \cos n\pi t - \left( \frac{1}{n\pi} \right)^3 2 \sin n\pi t \right]_0^1 \\ &= 2 \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi, \end{aligned}$$

sehingga

$$a_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \cos n\pi t \, dt = -2 \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 (\cos n\pi + 1).$$

Dengan koefisien-koefisien ini, ekspansi Fourier setengah selang cosinus diberikan oleh  $S_\infty^{\text{genap}}$ , dengan

$$\begin{aligned} S_N^{\text{genap}} &= \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{(\cos n\pi + 1)}{n^2} \cos n\pi t \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left( \cos 2\pi t + \frac{1}{4} \cos 4\pi t + \frac{1}{9} \cos 6\pi t + \dots \right). \end{aligned}$$

Konvergensi deret ini ditunjukkan pada Gambar 4.8(a).

(b) Ekspansi setengah selang sinus diberikan dengan membentuk ekstensi antisimetrik.

Karena fungsi ganjil, ekspansi Fouriernya adalah deret sinus

$$f(t) = \sum_{n=1} b_n \sin n\pi t,$$

dengan

$$b_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \sin n\pi t \, dt.$$

Sekarang

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \sin n\pi t \, dt &= \left[ -\frac{1}{n\pi} t \cos n\pi t + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi \\ \int_0^1 t^2 \sin n\pi t \, dt &= \left[ -\frac{1}{n\pi} t^2 \cos n\pi t + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 2t \sin n\pi t + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3 2 \cos n\pi t \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi + 2 \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3 \cos n\pi - 2 \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3, \end{aligned}$$

sehingga

$$b_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \sin n\pi t \, dt = 4 \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3 (1 - \cos n\pi).$$

Maka ekspansi setengah selang sinusnya diberikan oleh  $S_\infty^{\text{ganjil}}$ , dengan

$$\begin{aligned} S_\infty^{\text{ganjil}} &= \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^N \frac{(1 - \cos n\pi)}{n^3} \sin n\pi t \\ &= \frac{8}{\pi^3} \left( \sin \pi t + \frac{1}{27} \sin 3\pi t + \frac{1}{125} \sin 5\pi t + \dots \right) \end{aligned}$$

Konvergensi deret ini ditunjukkan pada Gambar 4.8(b).

Terlihat bahwa baik deret cosinus maupun sinus konvergen pada  $t - t^2$  antara 0 dan 1. Di luar ini, deret cosinus konvergen pada fungsi genap dan deret sinus konvergen pada fungsi ganjil. Laju konvergensinya juga berbeda. Untuk deret sinus, hanya dengan satu suku  $S_1^{\text{ganjil}}$  sudah sangat dekat dengan  $f(t)$ . Hanya dengan dua suku  $S_3^{\text{ganjil}}$  (tiga suku jika kita memasukkan  $n = 2$  yang nilainya nol), sudah tidak bisa dibedakan dengan  $f(t)$  pada selang yang kita perhatikan. Konvergensi deret cosinus dalam (a) jauh lebih lambat. Meskipun aproksimasi  $S_6^{\text{genap}}$  lebih dekat dengan  $f(t)$  dibandingkan dengan aproksimasi dua suku  $S_2^{\text{genap}}$ , perbedaan antara  $S_\infty^{\text{genap}}$  dengan  $f(t)$  masih terlihat dengan jelas.

Hal ini adalah kasus umum jika kita membuat ekstensi halus, hasilnya adalah lebih akurat untuk jumlah suku tertentu.

**Contoh 4.4.2.** Sebuah fungsi  $f(t)$  terdefinisi hanya pada selang  $0 \leq t \leq 2$  yaitu  $f(t) = t$ . Carilah deret Fourier yang hanya memiliki suku sinus untuk fungsi ini.

**Solusi 4.4.2.** Kita dapat memperoleh ekspansi setengah-selang sinus dengan memperluas fungsi asimetrik. Fungsi seperti itu dideskripsikan sebagai

$$f(t) = t \quad \text{untuk} \quad -2 < t \leq 2, \quad \text{dan} \quad f(t+4) = f(t).$$

Deret Fourier untuk fungsi ini diberikan oleh (4.19) dengan  $L = 2$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{2}.$$

Tetapi deret ini tidak konvergen pada 2, nilai fungsi dari  $t = 2$ , melainkan konvergen pada 0,, nilai rata-rata limit kanan dan kiri fungsi pada  $t = 2$ , seperti pada Gambar 4.3.

Kita bisa memperoleh deret sinus yang konvergen pada nilai yang benar pada titik akhir, jika kita memperhatikan deret

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{untuk } 0 < t \leq 2 \\ 4 - t & \text{untuk } 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Sebuah ekstensi antisimetrik dari fungsi ini memberikan fungsi ganjil dengan periodisitas 8 ( $2L = 8$ ,  $L = 4$ ). Ekspansi Fourier dari fungsi ini adalah deret sinus

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{4}$$

dengan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) \sin \frac{n\pi t}{4} dt \\ &= \frac{2}{4} \int_0^2 t \sin \frac{n\pi t}{4} dt + \frac{2}{4} \int_2^4 (4 - t) \sin \frac{n\pi t}{4} dt \end{aligned}$$

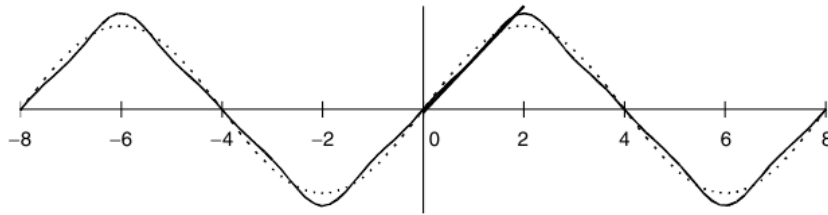
Dengan menggunakan metode Kronecker, kita memiliki

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4} t \cos \frac{n\pi t}{4} + \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi t}{4} \right]_0^2 + 2 \left[ -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{4} \right]_2^4 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ -\frac{4}{n\pi} t \cos \frac{n\pi t}{4} + \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi t}{4} \right]_2^4 \\ &= \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi t}{4} \\ &= \frac{16}{\pi^2} \left[ \sin \frac{\pi t}{4} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi t}{4} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi t}{4} - \dots \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pada  $0 \leq t \leq 2$ , deret sinus tersebut konvergen pada  $f(t) = t$ . Di luar selang ini, deret tersebut konvergen pada fungsi ganjil periodik ditunjukkan Gambar 4.9. Deret ini jauh lebih cepat konvergensinya dibandingkan (4.19). Suku pertama (garis putus-putus), sudah memberikan aproksimasi yang cukup baik. Perbedaan antara aproksimasi tiga buah suku sudah sangat sulit dibedakan.



Gambar 4.9: Deret Fourier sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang terbatas. Pada  $0 \leq t \leq 2$  deret tersebut konvergen pada  $f(t) = t$ . Di luar selang ini, deret tersebut konvergen pada fungsi ganjil periodik dengan periode 8.

Seperti yang sudah kita lihat, sebuah fungsi yang hanya terdefinisi pada selang terbatas, terdapat kemungkinan untuk memiliki beberapa deret Fourier yang berbeda. Deret tersebut semuanya konvergen pada selang yang diberikan, meskipun dengan laju konvergensi yang bisa berbeda. Untungnya dalam aplikasinya, deret yang harus kita gunakan sudah ditentukan otomatis oleh syarat batas.

Dari contoh-contoh yang sudah kita temui, kita bisa melakukan pengamatan sebagai berikut:

- Jika fungsinya diskontinu pada beberapa titik, koefisien Fouriernya berkurang dengan  $1/n$ .
- Jika fungsinya kontinu, tetapi turunan pertamanya diskontinu pada beberapa titik, koefisien Fouriernya berkurang dengan  $1/n^2$ .
- Jika fungsi dan turunan pertamanya kontinu, koefisien Fouriernya berkurang dengan  $1/n^3$ .

Meskipun komentar ini berdasarkan pada contoh yang sedikit, komentar ini secara umum valid. Sangat berguna untuk mengingatkannya ketika kita menghitung koefisien Fourier.

## 4.5 Deret Fourier Kompleks

Deret Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{p}t + b_n \sin \frac{n\pi}{p}t \right)$$

dapat dinyatakan dalam bentuk kompleks karena

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi}{p}t &= \frac{1}{2} \left( e^{i(\frac{n\pi}{p})t} + e^{-i(\frac{n\pi}{p})t} \right), \\ \sin \frac{n\pi}{p}t &= \frac{1}{2i} \left( e^{i(\frac{n\pi}{p})t} - e^{-i(\frac{n\pi}{p})t} \right) \end{aligned}$$

maka

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2i}b_n \right) e^{i\left(\frac{n\pi}{p}\right)t} + \left( \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2i}b_n \right) e^{-i\left(\frac{n\pi}{p}\right)t} \right].$$

Sekarang jika kita mendefinisikan  $c_n$  sebagai

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2i}b_n \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt + \frac{1}{2i} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) \left[ \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \right] dt \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i\left(\frac{n\pi}{p}\right)t} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2i}b_n \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt - \frac{1}{2i} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i\left(\frac{n\pi}{p}\right)t} dt \end{aligned}$$

dan

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt,$$

sehingga deretnya dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n e^{i\left(\frac{n\pi}{p}\right)t} + c_{-n} e^{i\left(\frac{n\pi}{p}\right)t} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\left(\frac{n\pi}{p}\right)t} \end{aligned} \quad (4.28)$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-i\left(\frac{n\pi}{p}\right)t} dt \quad (4.29)$$

Sekarang deret Fourier muncul dalam bentuk kompleks. Jika  $f(t)$  adalah fungsi kompleks dari variabel riil  $t$ , maka deret Fourier kompleks merupakan sesuatu yang alami. Jika  $f(t)$  sebuah fungsi riil, maka kita tetap dapat menyatakannya dalam deret kompleks (4.28). Dalam kasus ini  $c_{-n}$  adalah kompleks konjugat dari  $c_n$  ( $c_{-n} = c_n^*$ ).

Karena

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

maka

$$a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Sehingga apabila  $f(t)$  fungsi genap, maka  $c_{-n} = c_n$ . Jika  $f(t)$  fungsi ganjil maka  $c_{-n} = -c_n$ .

**Contoh 4.5.1.** Carilah deret Fourier kompleks dari fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

**Solusi 4.5.1.** Karena periodenya adalah  $2\pi$ , sehingga  $p = \pi$  dan deret Fourier kompleksnya adalah

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

dengan

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int} dt = \frac{1 - e^{-in\pi}}{2\pi ni} = \begin{cases} 0, & n = \text{genap}, \\ \frac{1}{\pi ni}, & n = \text{ganjil}. \end{cases}$$

Maka deret kompleksnya adalah

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi} \left( \dots - \frac{1}{3} e^{-i3t} - e^{-it} + e^{it} + \frac{1}{3} e^{i3t} + \dots \right).$$

Jelas bahwa

$$c_{-n} = \frac{1}{\pi(-n)i} = \frac{1}{\pi n(-i)} = c_n^*$$

seperti yang sudah kita duga, karena  $f(t)$  riil. Selanjutnya, karena

$$e^{int} - e^{-int} = 2i \sin nt$$

deret Fouriernya dapat dituliskan

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right).$$

Hal ini juga sudah kita duga karena  $f(t) - \frac{1}{2}$  merupakan fungsi ganjil

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi ni} + \frac{1}{\pi(-n)i} = 0$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i \left( \frac{1}{\pi ni} - \frac{1}{\pi(-n)i} \right) = \frac{2}{\pi n}$$

**Contoh 4.5.2.** Carilah deret Fourier fungsi berikut

$$f(t) = e^t \quad \text{untuk} \quad -\pi < t < \pi, \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

**Solusi 4.5.2.** Fungsi periodik ini berperiode  $2\pi$ . Kita dapat menyatakannya sebagai deret Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Tetapi koefisien Fourier kompleksnya lebih mudah dihitung, sehingga pertama kita nyatakan dalam deret Fourier kompleks

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-in} e^{(1-in)t} \right]_{-\pi}^{\pi}.$$

Karena

$$\begin{aligned} e^{(1-in)\pi} &= e^{\pi} e^{-in\pi} = (-1)^n e^{\pi}, \\ e^{-(1-in)\pi} &= e^{-\pi} e^{in\pi} = (-1)^n e^{-\pi} \\ e^{\pi} - e^{-\pi} &= 2 \sinh \pi \end{aligned}$$

sehingga

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{1+in}{1+n^2} \sinh \pi.$$

Sekarang

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2}{1+n^2} \sinh \pi, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = -\frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2n}{1+n^2} \sinh \pi \end{aligned}$$

Sehingga deret Fouriernya diberikan oleh

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nt - n \sin nt).$$

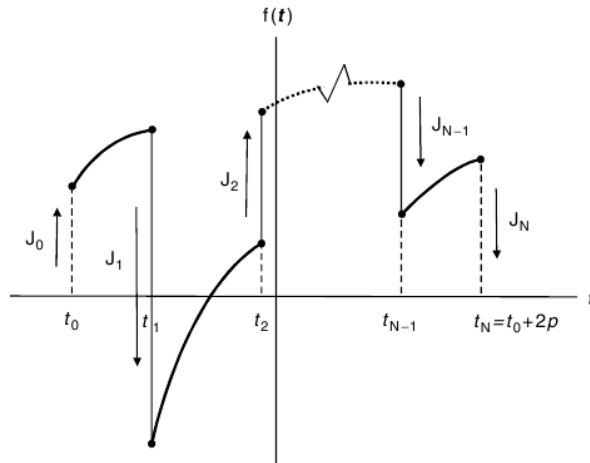
## 4.6 Metode Lompatan

Terdapat sebuah metode efektif untuk menghitung koefisien Fourier dikenal sebagai metode lompatan (*methods of jumps*). Sepanjang fungsinya kontinu sebagian, metode ini memungkinkan kita mencari koefisien Fourier dengan metode grafik.

Anggap bahwa  $f(t)$  pada Gambar 4.10, sebuah fungsi periodik berperiode  $2\pi$ . Fungsi ini kontinu sebagian. Letak diskontinunya ada pada  $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ , dihitung dari kiri ke kanan. Dua buah titik akhir  $t_0$  dan  $t_N$  bisa merupakan titik diskontinu maupun bukan. Misalkan  $f(t_i^+)$  merupakan limit kanan fungsi ketika  $t$  mendekati dari kanan  $t_i$ , sedangkan  $f(t_i^-)$  merupakan limit kiri. Pada tiap diskontinuitas  $t_i$ , kecuali pada dua titik akhir  $t_0$  dan  $t_N = t_0 + 2p$ , kita mendefinisikan sebuah lompatan  $J_i$  sebagai

$$J_i = f(t_i^+) - f(t_i^-).$$

Pada  $t_0$ , lompatan  $J_0$  didefinisikan sebagai



Gambar 4.10: Satu periode sebuah fungsi kontinu sebagian  $f(t)$  berperiode  $2p$ .

$$J_0 = f(t_0^+) - 0 = f(t_0^+)$$

dan pada  $t_N$ , lompatan  $J_N$  didefinisikan sebagai

$$J_N = 0 - f(t_N^-) = -f(t_N^-).$$

Lompatan ini digambarkan dengan tanda panah pada Gambar 4.10.  $J_i$  akan positif jika lompatan pada  $t_i$  ke atas dan akan negatif jika lompatannya ke bawah. Perhatikan bahwa pada  $t_0$  lompatannya adalah dari nol ke  $f(t_0^+)$ , dan pada  $t_N$  lompatannya adalah  $f(t_N^-)$  ke nol.

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa koefisien deret Fouriernya dapat dinyatakan dengan suku lompatan ini.

Koefisien deret Fourier kompleks (4.29) diberikan oleh

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt.$$

Marilah kita definisikan integralnya sebagai

$$\int_{-p}^p f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt = I_n[f(t)].$$

Sehingga  $c_n = \frac{1}{2p} I_n[f(t)]$  Karena

$$\frac{d}{dt} \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] = -\frac{p}{in\pi} \frac{df(t)}{dt} e^{-i(n\pi/p)t} + f(t) e^{-i(n\pi/p)t},$$

sehingga

$$f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt = d \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] + \frac{p}{in\pi} e^{-i(n\pi/p)t} df(t)$$

dari sini diperoleh

$$I_n[f(t)] = \int_{-p}^p d \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] + \frac{p}{in\pi} \int_{-p}^p e^{-i(n\pi/p)t} df(t).$$



Perhatikan bahwa

$$\int_{-p}^p e^{-i(n\pi/p)t} df(t) = \int_{-p}^p e^{-i(n\pi/p)t} \frac{df(t)}{dt} dt = I_n [f'(t)],$$

dan

$$\int_{-p}^p d \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] = -\frac{p}{in\pi} \left[ \int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \cdots + \int_{t_{N-1}}^{t_N} \right] \\ \times d \left[ f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right].$$

Karena

$$\int_{t_0}^{t_1} d \left[ f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] = f(t_1^-) e^{-i(n\pi/p)t_1} - f(t_0^+) e^{-i(n\pi/p)t_0} \\ \int_{t_1}^{t_2} d \left[ f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] = f(t_2^-) e^{-i(n\pi/p)t_2} - f(t_1^+) e^{-i(n\pi/p)t_1} \\ \int_{t_{N-1}}^{t_N} d \left[ f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] = f(t_N^-) e^{-i(n\pi/p)t_N} - f(t_{N-1}^+) e^{-i(n\pi/p)t_{N-1}},$$

kita mempunyai

$$\int_{-p}^p d \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] = \frac{p}{in\pi} f(t_0^+) e^{-i(n\pi/p)t_0} \\ + \frac{p}{in\pi} [f(t_1^+) - f(t_1^-)] e^{-i(n\pi/p)t_1} \\ + \cdots - \frac{p}{in\pi} f(t_N^-) e^{-i(n\pi/p)t_N} = \frac{p}{in\pi} \sum_{k=0}^{k=N} J_k e^{-i(n\pi/p)t_k}.$$

Sehingga

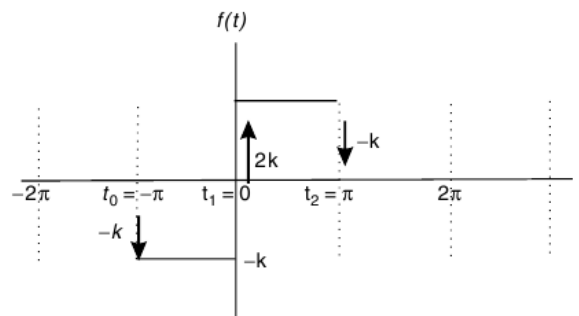
$$I_n [f(t)] = \frac{p}{in\pi} \sum_{k=0}^{k=N} J_k e^{-i(n\pi/p)t_k} + \frac{p}{in\pi} I_n [f'(t)].$$

Jelas  $I_n [f'(t)]$  dapat dihitung dengan cara yang sama  $I_n [f(t)]$ . Rumus ini dapat digunakan secara iteratif untuk mencari koefisien Fourier  $c_n$  untuk nilai  $n$  tak nol, karena  $c_n = I_n [f(t)] / 2p$ . Bersama dengan  $c_0$  yang diberikan oleh integral sederhana, koefisien-koefisien ini menentukan deret Fourier. Untuk kebanyakan fungsi yang sering ditemui, deret Fouriernya dapat dengan sederhana didapatkan dari lompatan pada titik-titik diskontinu. Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana hal ini dapat dilakukan dengan cepat dengan sketsa grafik beserta turunannya.

**Contoh 4.6.1.** Gunakan metode lompatan untuk mencari deret Fourier fungsi periodik  $f(t)$ , salah satu periodenya terdefinisi pada selang  $-\pi < t < \pi$  sebagai

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{untuk } -\pi < t < 0 \\ -k & \text{untuk } 0 < t < \pi \end{cases}$$

**Solusi 4.6.1.** Sketsa fungsi ini



Periode fungsi ini adalah  $2\pi$ , sehingga  $p = \pi$ . Jelas bahwa semua turunan fungsi ini adalah nol, sehingga kita memiliki

$$c_n = \frac{1}{2\pi} I_n [f(t)] = \frac{1}{i2\pi n} \sum_{k=0}^2 J_k e^{-i(n\pi/p)t_k}, \quad n \neq 0,$$

dengan

$$t_0 = -\pi, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi$$

dan

$$J_0 = -k, \quad J_1 = 2k, \quad J_2 = -k.$$

Karena

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{i2\pi n} [-ke^{in\pi} + 2k - ke^{-in\pi}] \\ &= \frac{k}{i2\pi n} [2 - 2\cos(n\pi)] = \begin{cases} 0 & n = \text{genap} \\ \frac{2k}{in\pi} & n = \text{ganjil} \end{cases}. \end{aligned}$$

Dari sini

$$a_n = c_n + c_{-n} = 0$$

$$b_n = i(c_n + c_{-n}) = \begin{cases} 0 & n = \text{genap} \\ \frac{4k}{n\pi} & n = \text{ganjil} \end{cases}.$$

Selanjutnya

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0,$$

maka deret Fouriernya diberikan oleh

$$f(t) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right).$$

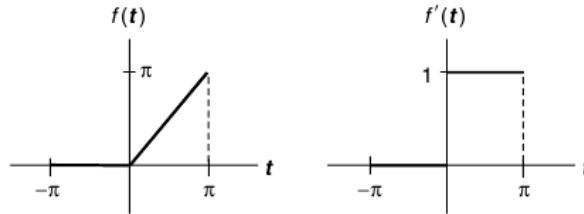
**Contoh 4.6.2.** Gunakan metode lompatan untuk mencari deret Fourier fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ t, & 0 < t < \pi \end{cases}, \quad f(t+2\pi) = f(t).$$

**Contoh 4.6.2.** Turunan pertama fungsi ini adalah

$$f'(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ t, & 0 < t < \pi \end{cases},$$

turunan yang lebih tinggi nilainya nol. Gambar  $f(t)$  dan  $f'(t)$  adalah sebagai berikut



Dalam kasus ini

$$p = \pi, \quad t_0 = -\pi, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi.$$

Sehingga

$$I_n [f(t)] = \frac{1}{in} \sum_{k=0}^2 J_k e^{-int_k} + \frac{1}{in} I_n [f'(t)],$$

dengan

$$J_0 = 0, \quad J_1 = 0, \quad J_2 = -\pi$$

dan

$$I_n [f'(t)] = \frac{1}{in} \sum_{k=0}^2 J'_k e^{-int_k}$$

dengan

$$J'_0 = 0, \quad J'_1 = 1, \quad J'_2 = -1.$$

Dari sini diperoleh

$$I_n [f(t)] = \frac{1}{in} (-\pi) e^{-in\pi} + \frac{1}{in} \left[ \frac{1}{in} (1 - e^{-in\pi}) \right]$$

dan

$$c_n = \frac{1}{2\pi} I_n [f(t)] = -\frac{1}{i2n} e^{-in\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} (1 - e^{-in\pi}), \quad n \neq 0.$$

Sebagai tambahan

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Sehingga koefisien Fouriernya  $a_n$  dan  $b_n$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{i2n} (-e^{-in\pi} + e^{in\pi}) + \frac{1}{2\pi n^2} (e^{-in\pi} + e^{in\pi}) - \frac{1}{\pi n^2} \\ &= \frac{1}{n} \sin n\pi + \frac{1}{\pi n^2} \cos n\pi - \frac{1}{\pi n^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2} & n = \text{ganjil} \\ 0 & n = \text{genap} \end{cases}, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = i \left[ -\frac{1}{i2n} (e^{-in\pi} + e^{in\pi}) + \frac{1}{2\pi n^2} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) \right] \\ &= -\frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{\pi n^2} \sin n\pi = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = \text{ganjil} \\ -\frac{1}{n} & n = \text{genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Sehingga deret Fouriernya dapat dituliskan sebagai

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nt$$

## 4.7 Sifat-sifat Deret Fourier

### 4.7.1 Teorema Parseval

Jika periodisitas sebuah fungsi periodik  $f(t)$  adalah  $2p$ , teorema Parseval menyatakan:

$$\frac{1}{2p} \int_{-p}^p [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

dengan  $a_n$  dan  $b_n$  adalah koefisien Fourier. Teorema ini dapat dibuktikan dengan menyatakan  $f(t)$  sebagai deret Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{p} + b_n \sin \frac{n\pi t}{p} \right)$$

dan mengintegalkannya. Tetapi penghitungan lebih sederhana jika kita mengerjakannya terlebih dahulu dengan deret Fourier kompleks

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/p)t},$$

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt.$$

Dengan ekspresi ini, integralnya dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \int_{-p}^p [f(t)]^2 dt &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/p)t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i(n\pi/p)t} dt. \end{aligned}$$

Karena

$$c_{-n} = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-i((-n)\pi/p)t} dt = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i(n\pi/p)t} dt,$$

diperoleh

$$\frac{1}{2p} \int_{-p}^p [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} = c_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{-n}.$$

Jika  $f(t)$  sebuah fungsi riil, maka  $c_{-n} = c_n^*$ . Karena

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad c_n^* = \frac{1}{2} (a_n + ib_n),$$

maka

$$c_n c_{-n} = c_n c_n^* = \frac{1}{4} [a_n^2 - (ib_n)^2] = \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2).$$

Sehingga

$$\frac{1}{2p} \int_{-p}^p [f(t)]^2 dt = c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{-n} = \left(\frac{1}{2} a_0\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Teorema ini memiliki interpretasi penting dan menarik. Kita telah belajar bahwa energi yang dibawa gelombang proporsional dengan kuadrat amplitudonya. Untuk gelombang yang dinyatakan dengan  $f(t)$ , energi dalam satu periode akan sebanding dengan  $\int_{-p}^p [f(t)]^2$ . Karena  $a_n \cos(n\pi t/p)$  juga merepresentasikan gelombang, maka energi gelombang cosinus murni ini sebanding dengan

$$\int_{-p}^p \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{p}\right)^2 dt = a_n^2 \int_{-p}^p \cos^2 \frac{n\pi t}{p} dt = p a_n^2$$

maka energi gelombang sinus murni

$$\int_{-p}^p \left(b_n \sin \frac{n\pi t}{p}\right)^2 dt = b_n^2 \int_{-p}^p \sin^2 \frac{n\pi t}{p} dt = p b_n^2.$$

Dari teorema Parseval, kita memiliki

$$\int_{-p}^p [f(t)]^2 dt = p \frac{1}{2} a_0^2 + p \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Hal ini juga mengatakan bahwa energi total dalam gelombang hanyalah jumlah total energi dalam komponen Fouriernya. Untuk alasan ini teorema Parseval juga dikatakan sebagai “teorema energi”.

#### 4.7.2 Jumlah Pangkat Bolak-balik Bilangan Bulat

Aplikasi menarik dari deret Fourier yaitu kegunaannya untuk menjumlahkan deret pangkat bolak-balik. Sebagai contoh, deret Fourier sebuah gelombang persegi

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

diberikan oleh

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

Pada  $x = \pi/2$ , kita memiliki

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

maka

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Hasil ini pertama kali ditemukan oleh Leibniz pada tahun 1673 secara geometrik. Hasil ini menjadi terkenal karena menjadi deret pertama yang ditemukan melibatkan  $\pi$ .

Teorema Parseval juga dapat digunakan untuk memberikan hasil tambahan. Dalam persoalan ini

$$[f(t)]^2 = k^2, \quad a_n = 0, \quad b_n = \begin{cases} \frac{4k}{\pi n} & n = \text{ganjil} \\ 0 & n = \text{genap} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = k^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{4k}{\pi} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right).$$

Sehingga kita mempunyai

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Dalam contoh berikut, kita akan menunjukkan penjumlahan seperti itu dengan deret Fourier.

**Contoh 4.7.1.** Gunakan deret Fourier untuk fungsi yang definisinya adalah

$$f(x) = x^2 \quad \text{untuk} \quad -1 < x < 1, \quad \text{dan} \quad f(x+2) = f(x)$$

untuk menunjukkan

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12}, & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} &= \frac{\pi^3}{32}, & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

**Solusi 4.7.1.** Deret Fourier fungsi ini diberikan oleh (4.20) dengan  $L = 1$

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x.$$

(a). Ambil  $x = 0$ , sehingga kita mempunyai

$$x^2 = 0, \quad \cos n\pi x = 1.$$

Maka

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

atau

$$-\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{3}.$$

Kita memperoleh

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

(b). Dengan  $x = 1$ , deretnya menjadi

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2} \cos n\pi.$$

Karena  $\cos n\pi = (-1)^n$ , kita memiliki

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2 n}{n^2}$$

atau

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

(c). Integrasikan kedua ruas dari 0 sampai 1/2

$$\int_0^{1/2} x^2 dx = \int_0^{1/2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x \right] dx$$

kita memiliki

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

atau

$$-\frac{1}{8} = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Karena

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = \text{genap}, \\ 1 & n = 1, 5, 9, \dots, \\ -1 & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

kita bisa menuliskan penjumlahan sebagai

$$-\frac{1}{8} = -\frac{4}{\pi^3} \left( 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right).$$

Kita memiliki

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

(d). Dengan menggunakan teorema Parseval, kita mempunyai

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2)^2 dx = \left( \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2} \right]^2.$$

Maka

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Kita memiliki

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Deret terakhir ini sangat penting dalam teori radiasi benda hitam, yang krusial dalam perkembangan teori kuantum.

---



---

### 4.7.3 Integrasi Deret Fourier

Jika deret Fourier diintegrasikan suku per suku, maka kita akan menemukan faktor  $1/n$  pada deret tersebut. Hal ini berefek pada percepatan konvergensi. Sehingga kita berharap deret dari hasil integrasi suku per suku akan konvergen dengan integral dari  $f(x)$ . Sebagai contoh, kita telah menunjukkan deret Fourier fungsi ganjil  $f(t) = t$  berperiode  $2L$  diberikan oleh

$$t = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t.$$

Kita mengharapkan integrasi suku per suku ruas kanan persamaan ini konvergen pada integral dari  $t$ . Yaitu

$$\int_0^t x \, dx = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^t \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

Hasil integrasi ini adalah

$$\frac{1}{2}t^2 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[ -\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x \right]_0^t$$

atau

$$t^2 = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t.$$

Karena

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

kita memiliki

$$t^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t$$

Hal ini tidak lain adalah deret Fourier konvergen pada  $t^2$  berperiode  $2L$  seperti pada (4.20).

**Contoh 4.7.2.** Carilah deret Fourier fungsi yang definisi dalam satu periodenya adalah

$$f(t) = t^3, \quad -L < t < L.$$

**Solusi 4.7.2.** Dengan mengintegrasikan deret Fourier untuk  $t^2$  pada selang tersebut suku per suku diperoleh

$$\int t^2 \, dt = \int \left[ \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t \right] dt,$$

kita mendapatkan

$$\frac{1}{3}t^3 = \frac{L^2}{3}t + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} t + C.$$

Kita dapat mencari konstanta integrasi  $C$  pada integral tersebut dengan melihat nilai kedua ruas pada  $t = 0$ , diperoleh  $C = 0$ . Selanjutnya karena pada selang  $-L < t < L$

$$t = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t,$$



maka deret Fouriernya

$$t^3 = \frac{2L^3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t + \frac{12L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin \frac{n\pi}{L} t.$$

#### 4.7.4 Turunan Deret Fourier

Dalam menurunkan deret Fourier suku per suku, kita harus lebih berhati-hati. Turunan suku per suku akan menyebabkan koefisien  $a_n$  dan  $b_n$  dikalikan dengan faktor  $n$ . Karena  $n$  naik linier, deret hasilnya bisa tidak konvergen. Ambil contoh

$$t = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t.$$

Persamaan ini valid pada  $-L < t < L$ , seperti pada (4.19). Turunan dari  $t$  jelas sama dengan 1. Tetapi turunan suku per suku deret Fourier ruas kanan

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t \right] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos \frac{n\pi}{L} t.$$

bahkan tidak konvergen.

Untuk melihat di bawah kondisi apa deret Fourier dari sebuah fungsi  $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right)$$

dapat diturunkan suku per suku, pertama kita mengasumsikan  $f(t)$  kontinu pada selang  $-L < t < L$  dan turunan fungsi  $f'(t)$  dapat diekspansikan dalam deret Fourier yang lain

$$f'(t) = \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a'_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b'_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right).$$

Koefisien  $a'_n$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= \frac{1}{L} \left[ f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t \right]_{-L}^L + \frac{n\pi}{L^2} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt. \\ &= \frac{1}{L} [f(L) - f(-L)] \cos n\pi + \frac{n\pi}{L} b_n \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dengan cara yang sama

$$b'_n = \frac{1}{L} [f(L) - f(-L)] \sin n\pi - \frac{n\pi}{L} a_n. \quad (4.31)$$

Dengan cara yang sama menurunkan deret Fourier sebuah fungsi suku per suku, kita memperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right) \right] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{L} t + b_n \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L} t \right) \end{aligned}$$

Sehingga akan memberikan koefisien

$$a'_n = \frac{n\pi}{L} b_n, \quad b'_n = -\frac{n\pi}{L} a_n. \quad (4.32)$$

Sehingga kita melihat secara umum turunan fungsinya bukan merupakan turunan deret Fourier suku per suku. Tetapi jika fungsinya memenuhi kondisi

$$f(L) = f(-L), \quad (4.33)$$

dengan  $a'_n$  dan  $b'_n$  diberikan pada (4.30) dan (4.31) identik dengan yang diberikan (4.32). Kita menyebut (4.33) kondisi “kepala sama dengan ekor”. Ketika kondisi ini terpenuhi, turunan suku per suku deret Fourier sebuah fungsi akan konvergen dengan turunan fungsi. Perhatikan bahwa jika fungsi periodik  $f(t)$  kontinu di semua tempat, kondisi ini otomatis terpenuhi.

Sekarang jelas mengapa (4.19) tidak dapat diturunkan suku per suku. Untuk fungsi ini

$$f(L) = L \neq -L = f(-L)$$

kondisi “kepala sama dengan ekor” tidak terpenuhi. Dalam contoh berikut, fungsinya memenuhi kondisi ini, sehingga turunan deretnya diberikan oleh turunan suku per suku.

**Contoh 4.7.3.** Deret Fourier  $t^2$  pada selang  $-L < t < L$  diberikan oleh (4.20)

$$\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t = t^2$$

Deret ini memenuhi “kepala sama dengan ekor”, seperti ditunjukkan pada Gambar 4.4. Tunjukkan bahwa turunan suku per sukunya sama dengan  $2t$ .

**Solusi 4.7.3.**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t \right] &= \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{d}{dt} \cos \frac{n\pi}{L} t \\ &= \frac{4L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t \end{aligned}$$

yang merupakan deret Fourier  $2t$  dalam selang yang diinginkan seperti pada (4.19)

## 4.8 Deret Fourier dan Persamaan Diferensial

Deret Fourier mempunyai peran penting dalam menyelesaikan persamaan diferensial, seperti yang akan kita lihat pada contoh di akhir bab ini. Dalam subbab ini kita akan membatasi diri kita dengan beberapa aplikasi deret Fourier untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa tak homogen.

### 4.8.1 Persamaan Diferensial dengan Syarat Batas

Marilah kita perhatikan persamaan diferensial tak homogen berikut

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Kita ingin mencari solusi antara  $t = 0$  dan  $t = 1$ . Sebelumnya kita telah mempelajari bahwa solusi umum dari persamaan ini adalah jumlah dari fungsi pelengkap  $x_c$  dengan solusi khusus  $x_p$ . Solusinya yaitu

$$x = x_c + x_p,$$

dengan  $x_c$  adalah solusi persamaan homogen

$$\frac{d^2x_c}{dt^2} + 4x_c = 0,$$

dengan dua buah konstanta sebarang, dan  $x_p$  adalah solusi khusus dari

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + 4x_p = 4t,$$

tanpa konstanta sebarang. Solusi dari kasus ini

$$x_c = A \cos 2t + B \sin 2t,$$

$$x_p = t.$$

Sehingga solusi umumnya

$$x = A \cos 2t + B \sin 2t + t.$$

Konstanta  $A$  dan  $B$  ditentukan oleh syarat batas. Karena

$$x(0) = A = 0$$

$$x(1) = A \cos 2 + B \sin 2 + 1 = 0.$$

Sehingga

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{\sin 2}.$$

Sehingga solusi eksak yang memenuhi syarat batas adalah

$$x(t) = t - \frac{1}{\sin 2} \sin 2t.$$

Fungsi ini dalam selang  $0 \leq t \leq 1$  dapat diekspansikan dalam deret Fourier sinus setengah selang

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t,$$

dengan

$$b_n = 2 \int_0^1 \left( t - \frac{1}{\sin 2} \sin 2t \right) \sin n\pi t \, dt.$$

Kita telah menunjukkan bahwa

$$\int_0^1 t \sin n\pi t \, dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Dengan integral parsial dua kali, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin 2t \sin n\pi t \, dt &= \left[ -\frac{1}{n\pi} \sin 2t \cos n\pi t + \frac{2}{(n\pi)^2} \cos 2t \sin n\pi t \right]_0^1 \\ &\quad + \frac{4}{(n\pi)^2} \int_0^1 \sin 2t \sin n\pi t \, dt. \end{aligned}$$

Menggabungkan suku terakhir dengan ruas kiri dan mengambil limit kita memperoleh

$$\int_0^1 \sin 2t \sin n\pi t \, dt = \frac{(-1)^{n+1} n\pi}{[(n\pi)^2 - 4]} \sin 2.$$

Dari sini diperoleh

$$b_n = 2 \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\sin 2} \frac{(-1)^{n+1} n\pi}{[(n\pi)^2 - 4]} \sin 2 \right] = (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi [4 - (n\pi)^2]}. \quad (4.34)$$

Sehingga solusi yang memenuhi syarat batas adalah

$$x(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n [4 - (n\pi)^2]} \sin n\pi t.$$

Sekarang kita harus menunjukkan bahwa hasil ini bisa didapatkan langsung dari metode deret Fourier berikut. Pertama kita ekspansikan solusinya, apapun itu, pada deret Fourier sinus setengah selang

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

Prosedur ini valid karena kita tidak peduli dengan solusinya, kita selalu bisa memperluasnya antisimetrik pada selang  $-1 < t < 0$  dan kemudian pada semua garis riil dengan syarat periodik  $x(t+2) = x(t)$ . Deret Fourier yang merepresentasikan fungsi ganjil ini dengan periode 2 diberikan di atas. Fungsi ini kontinu di tiap tempat, sehingga dapat diturunkan suku per suku. Lebih dari itu, syarat batas  $x(0) = 0$  dan  $x(1) = 1$  secara otomatis dipenuhi deret ini.

Jika kita masukkan deret ini pada persamaan diferensial

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-(n\pi)^2 + 4] b_n \sin n\pi t = 4t.$$

Persamaan ini dapat dianggap sebagai fungsi  $4t$  yang dinyatakan dalam deret Fourier sinus. Koefisien  $[-(n\pi)^2 + 4] b_n$  diberikan oleh

$$[-(n\pi)^2 + 4] b_n = 2 \int_0^1 4t \sin n\pi t \, dt = 8 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Diperoleh

$$b_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi [4 - (n\pi)^2]}$$

yang identik dengan (4.34). Sehingga kita bisa memperoleh hasil yang persis sama dengan sebelumnya.

Hal ini menunjukkan bahwa metode deret Fourier adalah metode yang sesuai dan langsung. Tidak semua persoalan syarat batas dapat diselesaikan dengan cara ini, tetapi kebanyakan bisa. Ketika satu persoalan dapat diselesaikan dengan metode deret Fourier, bentuk solusinya biasanya lebih berguna.

**Contoh 4.8.1.** Sebuah balok sepanjang  $L$  yang ujungnya ditahan memiliki beban yang seragam. Pergeseran balok tersebut  $y(x)$  memenuhi persamaan

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w}{EI}$$

dengan  $w$ ,  $E$  dan  $I$  adalah konstanta ( $w$  beban per satuan panjang,  $E$  modulus Young dan  $I$  momen inersia). Selanjutnya  $y(t)$  juga memenuhi syarat batas

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y(L) &= 0 \\ y''(0) &= 0, & y''(L) &= 0 \end{aligned}$$

(Hal ini karena tidak ada pergeseran dan juga momen pada dua buah ujung.) Carilah kurva pergeseran balok  $y(x)$ .

**Solusi 4.8.1.** Fungsi ini bisa kita ekspansikan dalam deret Fourier sinusnya

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Empat buah syarat batas secara otomatis terpenuhi. Deret ini dan turunannya kontinu, sehingga bisa diturunkan suku per suku. Jika kita masukkan dalam persamaan, kita mempunyai

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{w}{EI}.$$

Hal ini berarti  $b_n(n\pi/L)^4$  adalah koefisien deret Fourier sinus dari  $w/EI$ . Sehingga

$$b_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{w}{EI} \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = -\frac{2}{L} \frac{w}{EI} \frac{L}{n\pi} (\cos n\pi - 1).$$

Dari sini

$$b_n = \begin{cases} \frac{4wL^4}{EI} \frac{1}{(n\pi)^5} & n = \text{ganjil} \\ 0 & n = \text{genap} \end{cases}.$$

Sehingga

$$y(x) = \frac{4wL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \sin \frac{(2n-1)n\pi x}{L}.$$

Deret ini akan cepat konvergen dikarenakan suku pangkat 5 pada penyebut.

### 4.8.2 Osilator Periodik Teredam

Perhatikan sistem massa dan pegas teredam yang diakibatkan fungsi gaya periodik eksternal. Persamaan diferensial untuk gerak ini adalah

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t). \quad (4.35)$$

Kita mengingatkan kembali jika fungsi gaya eksternal  $F(t)$  merupakan fungsi sinus atau cosinus, maka solusi keadaan stabil sistem adalah gerak osilatorik dengan frekuensi yang sama dengan fungsi input. Sebagai contoh jika

$$F(t) = F_0 \sin \omega t,$$

maka

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \alpha), \quad (4.36)$$

dengan

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}.$$

Tetapi jika  $F(t)$  fungsi periodik dengan frekuensi  $\omega$ , tetapi bukan merupakan fungsi sinus dan cosinus, maka solusi stabilnya bukan hanya mengandung suku dengan frekuensi input  $\omega$ , tetapi juga suku yang lain dikalikan frekuensi ini. Anggap fungsi gaya input diberikan oleh gelombang persegi

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < L \\ -1 & -L < t < 0 \end{cases}, \quad F(t + 2L) = F(t). \quad (4.37)$$

Gelombang persegi ini berulang pada waktu  $2L$ . Jumlah ulangan tiap satu detik dinamakan frekuensi  $\nu$ . Jelaslah  $\nu = 1/(2L)$ . Ingat bahwa frekuensi sudut  $\omega$  didefinisikan sebagai  $2\pi\nu$ . Maka

$$\omega = 2\pi \frac{1}{2L} = \frac{\pi}{L},$$

kadang kita mengatakan  $\omega$  sebagai frekuensi.

Sekarang seperti yang sudah ditunjukkan ekspansi deret Fourier  $F(t)$  diberikan oleh

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t,$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = \text{ganjil}, \\ 0 & n = \text{genap}. \end{cases}$$

Terlihat di sini suku pertama adalah gelombang sinus murni dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi input gelombang persegi. Kita menyebutnya sebagai frekuensi dasar  $\omega_1$  ( $\omega_1 = \omega$ ). Suku lain dalam deret Fourier memiliki frekuensi dari perkalian frekuensi dasar. Frekuensi ini dinamakan frekuensi harmonik. Sebagai contoh, frekuensi harmonik kedua dan

ketiga memiliki frekuensi masing-masing  $\omega_2 = 2\pi/L = 2\omega$  dan  $\omega_3 = 3\pi/L = 3\omega$ . (Di sini tidak ada frekuensi harmonik pertama).

Dengan input gelombang persegi  $F(t)$  yang dinyatakan dalam deret Fourier pada (4.35), respon dari sistem juga merupakan superposisi dari frekuensi harmonik ini, karena (4.35) merupakan persamaan diferensial linier. Hal ini berarti jika  $x_n$  merupakan solusi khusus dari

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} + c \frac{dx_n}{dt} + kx_n = b_n \sin \omega_n t,$$

sehingga solusi (4.35) adalah

$$x_p = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Sehingga mengikuti (4.36) yaitu dengan input yang berupa fungsi gaya gelombang persegi, solusi stabil dari sistem massa pegas diberikan oleh

$$x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(\omega_n t - \alpha_n)}{\sqrt{(k - m\omega_n^2)^2 + (c\omega_n)^2}}$$

dengan

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} = n\omega, \quad \alpha_n = \tan^{-1} \frac{c\omega_n}{k - m\omega_n^2}.$$

Solusi ini mengandung tidak hanya suku dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi input  $\omega$ , tetapi juga suku dengan perkalian frekuensi ini. Jika salah satu frekuensi yang lebih tinggi dekat dengan frekuensi alami sebuah sistem  $\omega_0$  ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ), maka suku tertentu akan sangat dominan dalam respon sistem. Hal ini merupakan masalah serius dalam analisis getaran. Frekuensi input bisa saja lebih rendah dibandingkan dengan frekuensi alami sistem, tetapi jika inputnya bukan sinusoidal murni, maka resonansi bisa saja terjadi. Kita akan lihat contoh tersebut berikut ini.

**Contoh 4.8.2.** Anggap kita bekerja pada satuan yang konsisten,  $m = 1$ ,  $c = 0.2$ ,  $k = 9$  dan  $\omega = 1$ , dan gaya input  $F(t)$  diberikan oleh (4.37). Carilah solusi stabil  $x_p$  dari sistem massa pegas ini.

**Solusi 4.8.2.** Karena  $\omega = \pi/L = 1$  maka  $L = \pi$  dan  $\omega_n = n$ . Seperti yang sudah kita tunjukkan deret Fourier  $F(t)$  adalah

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right).$$

Solusi stabilnya diberikan oleh

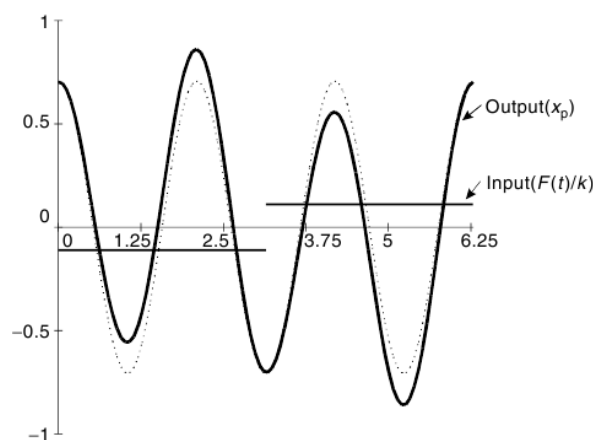
$$x_p(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin(nt - \alpha_n)}{\sqrt{(9 - n^2)^2 + (0.2n)^2}}$$

$$\alpha_n = \tan^{-1} \frac{0.2n}{9 - n^2}, \quad 0 \leq \alpha_n \leq \pi.$$

Setelah kita hitung, kita peroleh

$$x_p(t) = 0.1591 \sin(t - 0.0250) + 0.7073 \sin(3t - 1.5708) \\ + 0.0159 \sin(5t - 3.0792) + \dots$$

Gambar berikut menunjukkan  $x_p$  yang dibandingkan dengan fungsi gaya input. Agar memiliki dimensi jarak yang sama, gaya input dinyatakan dalam suku “jarak statik”  $F(t)/k$ . Suku  $0.7073 \sin(3t - 1.5708)$  ditunjukkan sebagai garis titik-titik. Terlihat bahwa suku ini mendominasi respon sistem. Hal ini karena suku dengan  $n = 3$  pada deret Fourier  $F(t)$  memiliki frekuensi yang sama dengan frekuensi alami sistem ( $\sqrt{k/m} = 3$ ). Sehingga dekat resonansi getaran muncul, dengan massa berosilasi lengkap tiga kali untuk tiap osilasi gaya luar.



Untuk demonstrasi yang menarik dari fenomena ini bisa dilihat pada Feynmann Lecture of Physics, Vol. I, Chapter 50.

Marilah kita berikan label untuk dua buah  $C$  berurutan di dekat tengah-tengah keyboard dengan  $C$ ,  $C'$  dan di atas  $G$  dengan  $G$ ,  $G'$ . Nada dasar akan memiliki frekuensi relatif sebagai berikut

$$C - 2, \quad G - 3 \\ C' - 4, \quad G' - 6$$

Hubungan harmonik ini dapat kita demonstrasikan dengan cara berikut. Anggap kita menekan  $C'$  pelan-pelan sehingga tidak berbunyi tetapi hanya menyebabkan peredamnya terangkat. Jika kita membunyikan  $C$ , maka akan terbentuk nada dasarnya dan nada harmoniknya. Nada harmonik kedua akan menyebabkan tali  $C'$  bergetar. Jika kita lepaskan  $C$  ( $C'$  tetap kita tekan) peredam akan meredam getaran tali  $C$ , dan kita akan mendengar (dengan pelan) nada  $C'$  ketika ini hilang. Dengan cara yang sama nada harmonik  $C$  ketiga akan menyebabkan getaran  $G'$ .

Fenomena ini selain menarik juga penting. Dalam sistem mekanik dan elektrik yang dipaksa dengan sebuah fungsi periodik berfrekuensi lebih kecil dari frekuensi alami sistem,



sepanjang fungsi gayanya tidak sinusoidal murni, salah satu frekuensi harmoniknya mungkin akan beresonansi dengan sistem. Untuk menghilangkan/mengurangi kemunculan abnormal dari getaran resonansi yang besar dan merusak, kita tidak boleh membiarkan adanya frekuensi harmonik dari gaya input mendominasi respon sistem.

## Latihan

1. Tunjukkan bahwa jika  $m$  dan  $n$  bilangan bulat maka:

$$(a) \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$(b) \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$(c) \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \text{ untuk semua } n, m.$$

$$(d) \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & n, m \text{ semuanya ganjil atau genap} \\ \frac{L}{\pi} \frac{2n}{n^2 - m^2} & n \text{ ganjil, } m \text{ genap, atau, } n \text{ genap, } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

2. Carilah deret Fourier untuk fungsi berikut

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 2 & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Jawab:

$$(a) f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots \right)$$

$$(b) f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots \right)$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{3} \cos 6x - \dots \right] + \frac{1}{2} \sin x$$

3. Carilah deret Fourier fungsi berikut:

$$(a) f(t) = \begin{cases} -1 & -2 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 2 \end{cases}, \quad f(t + 4) = f(t),$$

$$(b) f(t) = t^2, \quad 0 < t < 2, \quad f(t+2) = f(t)$$

Jawab

$$(a) f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{2} + \dots \right]$$

$$(b) f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \cos n\pi t + \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin n\pi t$$

4. Carilah ekspansi Fourier cosinus dan sinus setengah selang untuk fungsi berikut

$$(a) f(t) = 1, \quad 0 < t < 2.$$

$$(b) f(t) = t, \quad 0 < t < 1.$$

$$(c) f(t) = t^2, \quad 0 < t < 3.$$

Jawab

$$(a) 1; \quad \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2},$$

$$(b) \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi t; \quad \frac{2}{\pi} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi t$$

$$(c) 3 + \frac{36}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{3};$$

$$\frac{18}{\pi^3} \left[ \left( \frac{\pi^2}{1} - \frac{4}{1^3} \right) \sin \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{2} \sin \frac{2\pi t}{3} \right. \\ \left. + \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{3^3} \right) \sin \frac{3\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{4\pi t}{3} + \dots \right].$$

5. Bentuk keluaran osilator elektronik memiliki bentuk gelombang sinus  $f(t) = \sin t$  untuk  $0 < t \leq \pi/2$ , kemudian turun menjadi nol dan mulai lagi. Carilah deret Fourier kompleks bentuk gelombang ini.

Jawab

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{4ni-1}{16n^2-1} e^{i4nt}.$$

6. Gunakan metode lompatan untuk mencari deret Fourier sinus setengah selang fungsi  $g(t) = \sin t$  terdefinisi pada interval  $0 < t < \pi$ .

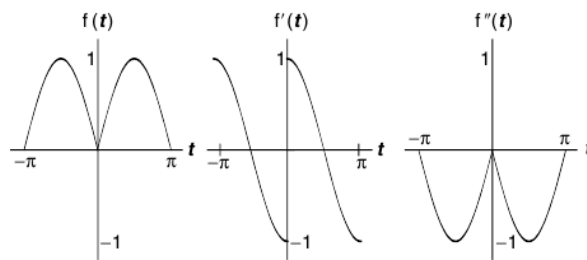
Petunjuk: Untuk deret cosinus, kita membutuhkan ekstensi genap dari fungsi. Misalkan

$$f(t) = \begin{cases} g(t) = \sin t & 0 < t < \pi, \\ g(-t) = -\sin t & -\pi < t < 0. \end{cases}$$

Turunannya adalah

$$f'(t) = \begin{cases} \cos t & 0 < t < \pi \\ -\cos t & -\pi < t < 0, \end{cases}, \quad f''(t) = -f(t).$$

Sketsa fungsi dan turunannya adalah



Jawab

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos 2t + \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t + \dots \right).$$

7. Gunakan metode lompatan untuk mencari ekspansi Fourier setengah selang (a) cosinus dan (b) sinus dari  $g(t)$  yang hanya terdefinisi pada selang  $0 < t < 1$  sebagai

$$g(t) = t - t^2, \quad 0 < t < 1.$$

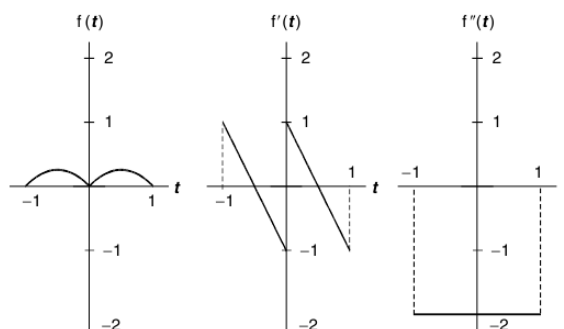
Petunjuk: Untuk ekspansi setengah selang cosinus, fungsinya haruslah diperluas simetrik untuk negatif  $t$ . Sehingga kita harus mengekspansikan deret Fourier fungsi genap  $f(t)$  sebagai

$$f(t) = \begin{cases} g(t) = t - t^2 & 0 < t < 1 \\ g(-t) = -t - t^2 & -1 < t < 0 \end{cases}.$$

Turunan pertama dan kedua fungsi ini diberikan oleh

$$f'(t) = \begin{cases} 1 - 2t & 0 < t < 1 \\ -1 - 2t & -1 < t < 0 \end{cases}, \quad f''(t) = -2$$

dan turunan lebih tingginya nol. Sketsa fungsi ini dan turunannya



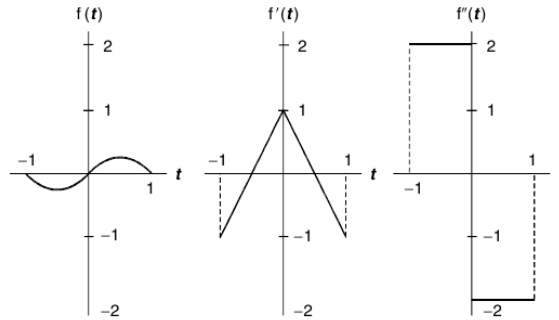
- (b) Untuk ekspansi setengah selang sinus, ekstensi antisimetrik  $g(t)$  pada negatif  $t$  dieprlukan. Misalkan

$$f(t) = \begin{cases} g(t) = t - t^2 & 0 < t < 1, \\ -g(-t) = t + t^2 & -1 < t < 0. \end{cases}$$

Turunan pertama dan kedua fungsi ini diberikan oleh

$$f'(t) = \begin{cases} 1 - 2t & 0 < t < 1 \\ 1 + 2t & -1 < t < 0 \end{cases}, \quad f''(t) = \begin{cases} -2 & 0 < t < 1, \\ 2 & -1 < t < 0 \end{cases}$$

dan turunan lebih tingginya nol. Sketsa fungsi ini dan turunannya



Jawab

$$(a) f(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left( \cos 2t + \frac{1}{4} \cos 4t + \frac{1}{9} \cos 6t + \dots \right)$$

$$(b) f(t) = \frac{8}{\pi^3} \left( \sin \pi t + \frac{1}{27} \sin 3\pi t + \frac{1}{125} \sin 5\pi t + \dots \right)$$

8. Kerjakan soal nomor 3 dengan metode lompatan.  
9. (a) Carilah ekspansi setengah selang cosinus fungsi berikut

$$f(t) = t, \quad 0 < t < 2.$$

- (b) Sketsakan fungsinya dari  $-8 \leq t \leq 8$  deret Fourier ini.  
(c) Berapakah periode fungsi ini?

Jawab

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi}{2} t, \quad \text{periode} = 4.$$

10. (a) Carilah ekspansi setengah selang cosinus fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 2 \\ 4 - t & 2 \leq t < 4 \end{cases}$$

- (b) Sketsakan fungsinya dari  $-8 \leq t \leq 8$  deret Fourier ini.  
(c) Berapakah periode fungsi ini?

Jawab

$$f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( 1 + \cos n\pi - 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi}{4} t, \quad \text{periode} = 8.$$

11. (a) Tunjukkan deret Fourier dua soal sebelum ini adalah identik.  
 (b) bandingkan dua buah sketsa dan carilah alasannya mengapa seperti ini.

Jawab. Karena merepresentasikan fungsi yang sama, keduanya dapat dinyatakan dalam deret Fourier

$$f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi t}{2} + \dots \right).$$

12. Gunakan deret Fourier untuk

$$f(t) = t \quad \text{untuk} \quad -1 < t < 1 \quad f(t+2) = f(t)$$

untuk menunjukkan bahwa

- (a)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ ,  
 (b)  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$

13. Gunakan deret Fourier pada Gambar 4.5 untuk menunjukkan

- (a)  $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ ,  
 (b)  $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ .

Petunjuk (a). Ambil  $t = 0$ . (b). Gunakan teorema Parseval dan  $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ .

14. Gunakan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{dan} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

untuk membuktikan

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{7\pi^4}{720}.$$

15. Sebuah fungsi  $f(t)$  berperiode  $2\pi$  didekati dengan deret Fourier yang hanya memiliki  $N$  buah suku. Deviasi kuadrat didefinisikan sebagai

$$\varepsilon = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(t) - \sum_{n=1}^N b_n \sin nt \right]^2 dt.$$

Hal ini merupakan ukuran dari kesalahan aproksimasi. Tunjukkan bahwa agar  $\varepsilon$  minimum maka  $b_n$  haruslah merupakan koefisien Fourier

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Petunjuk: Ambil  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_n} = 0$ .

16. Tunjukkan untuk  $-\pi \leq x \leq \pi$

$$(a) \cos k\pi = \frac{\sin k\pi}{k\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2k \sin k\pi}{\pi(k^2 - n^2)} \cos nx.$$

$$(b) \cot k\pi = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n^2 - k^2} \right)$$

17. Carilah solusi stabil dari

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = f(t),$$

dengan  $f(t) = t$ ,  $-\pi \leq t < \pi$  dan  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

Jawab

$$x_p = \sum \frac{(-1)^n 2(n^2 - 3)}{n(n^4 - 2n^2 + 9)} \sin nt + \sum \frac{(-1)^n 4}{(n^4 - 2n^2 + 9)} \cos nt.$$

18. Gunakan metode deret Fourier untuk menyelesaikan persoalan syarat batas berikut

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{Px}{EIL}$$

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0,$$

$$y''(0) = 0, \quad y''(L) = 0.$$

$y(x)$  adalah pergeseran tongkat akibat dari bertambahnya beban yang diberikan oleh  $Px/L$ .

Jawab.

$$y(x) = \frac{2PL^4}{\pi^4 EI} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

19. Carilah deret Fourier untuk

$$(a) f(t) = t \text{ untuk } -\pi < t < \pi \text{ dan } f(t + 2\pi) = f(t).$$

$$(b) f(t) = |t| \text{ untuk } -\pi < t < \pi \text{ dan } f(t + 2\pi) = f(t).$$

Tunjukkan bahwa deret yang diperoleh dengan turunan suku per suku pada (a) tidak konvergen dengan  $f'(t)$  sedangkan penurunan suku per suku pada (b) konvergen dengan  $f'(t)$ . Mengapa?

# Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah generalisasi dari deret Fourier. Transformasi ini memberikan representasi, dalam suku superposisi dari gelombang sinusoidal, untuk fungsi yang didefinisikan pada interval tak hingga tanpa periodisitas tertentu. Transformasi ini merupakan alat matematik yang sangat penting ketika kita mempelajari gelombang, dalam satu bentuk atau yang lainnya, yang biasa kita jumpai dalam fisika dan teknologi dewasa ini.

Transformasi Fourier, sama seperti transformasi Laplace, tidak lain adalah anggota dari sebuah kelas yang dinamakan sebagai transformasi integral. Transformasi ini sangat berguna untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Tetapi pentingnya transformasi Fourier jauh melebihi sekedar menyelesaikan persamaan diferensial. Dalam mekanika (fisika) kuantum, transformasi ini memungkinkan kita melihat fungsi gelombang baik dalam ruang koordinat maupun ruang momentum. Dalam teori informasi, transformasi ini memungkinkan seseorang mempelajari sebuah bentuk gelombang dalam domain waktu maupun frekuensi. Untuk alasan ini, transformasi Fourier menjadi batu pijakan dari berbagai bidang yang berbeda mulai dari teknologi pengolahan sinyal sampai teori mekanika kuantum.

## 5.1 Integral Fourier sebagai sebuah Batas dari Deret Fourier

Seperti yang sudah kita lihat, deret Fourier sangat berguna untuk merepresentasikan baik fungsi periodik maupun fungsi yang terbatas. Tetapi dalam berbagai permasalahan, fungsi yang menjadi ketertarikan seperti pulsa tak berulang dari gaya atau tegangan, merupakan fungsi non periodik dalam waktu yang terbatas. Dalam kasus tersebut, kita masih bisa membayangkan bahwa fungsinya periodik dengan periode mendekati tak hingga. Dalam limit ini, deret Fourier menjadi integral Fourier.

Untuk memperluas kosep deret Fourier pada fungsi non periodik, pertama kita tinjau sebuah fungsi yang berulang setelah periode  $2p$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{p} t + b_n \sin \frac{n\pi}{p} t \right),$$

---

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \frac{n\pi}{p} t dt, \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \frac{n\pi}{p} t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa tiap suku  $\cos(n\pi/p)t$  dan  $\sin(n\pi/p)t$  adalah fungsi periodik. Periodenya  $T_n$  ditentukan oleh hubungan ketika  $t$  dinaikkan oleh  $T_n$ , fungsinya kembali ke nilai sebelumnya

$$\cos \frac{n\pi}{p} (t + T_n) = \cos \left( \frac{n\pi}{p} t + \frac{n\pi}{p} T_n \right) = \cos \frac{n\pi}{p} t.$$

Maka,

$$\frac{n\pi}{p} T_n = 2\pi \quad \text{dan} \quad T_n = \frac{2p}{n}.$$

Frekuensi  $\nu$  adalah jumlah osilasi tiap detik. Sehingga tiap suku berhubungan dengan frekuensi  $\nu_n$ ,

$$\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{n}{2p}.$$

Sekarang jika  $t$  adalah waktu, maka  $\nu_n$  hanyalah frekuensi temporal. Jika variabel  $x$  adalah jarak, maka  $\nu_n$  merupakan frekuensi spasial. Distribusi dari semua frekuensi  $\left\{ \frac{n}{2p} \right\}$  disebut sebagai spektrum frekuensi. Untuk melihat perubahan pada spektrum frekuensi ketika  $p$  naik, perhatikan kasus ketika  $p = 1, 2$  dan  $10$  yang frekuensinya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p = 1, \quad \nu_n &= 0, 0.50, 1.0, 1.50, 2.0, \dots \\ p = 2, \quad \nu_n &= 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, \dots \\ p = 10, \quad \nu_n &= 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, \dots \end{aligned}$$

Terlihat di sini bahwa ketika  $p$  semakin besar, maka spektrum diskritnya menjadi semakin dan semakin rapat. Dan akan menjadi spektrum kontinu ketika  $p \rightarrow \infty$ , dan deret Fouriernya menjadi sebuah integral. Hal ini bisa terjadi ketika  $f(t)$  terintegralkan dalam jangkauan tak hingga (tidak ada singularitas).

Kadang untuk meringkas penulisan, kita memperkenalkan frekuensi sudut sebagai  $\omega_n = 2\pi\nu_n$ . Sehingga

$$\omega_n = 2\pi\nu_n = 2\pi \frac{n}{2p} = \frac{n\pi}{p},$$

sehingga deret Fouriernya dapat dituliskan

$$f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t).$$

Sepanjang  $f(t)$  terintegralkan dalam jangkauan tak hingga, hal ini berarti integral  $\int_{-p}^p |f(t)| dt$  ada meskipun  $p \rightarrow \infty$ . Sehingga

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt = 0.$$



Maka,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t),$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \omega_n t \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \omega_n t \, dt.$$

Selanjutnya kita dapat mendefinisikan

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{p} - \frac{n\pi}{p} = \frac{\pi}{p}.$$

Kita mendapatkan

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \cos \omega_n t \, dt \right] \cos \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \sin \omega_n t \, dt \right] \sin \omega_n t.$$

Jika kita menuliskan deretnya sebagai

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_p(\omega_n) \cos \omega_n t + B_p(\omega_n) \sin \omega_n t] \Delta\omega,$$

maka

$$A_p(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \cos \omega_n t \, dt,$$

$$B_p(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \sin \omega_n t \, dt.$$

Sekarang jika  $p \rightarrow \infty$ , maka  $\Delta\omega \rightarrow 0$  dan  $\omega_n$  menjadi variabel kontinu. Selanjutnya

$$A(\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} A_p(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt,$$

$$B(\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} B_p(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt.$$

Sehingga deret tak hingganya menjadi jumlah Riemann sebuah integral

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] \, d\omega.$$

Integral ini dikenal sebagai integral Fourier. Kita telah memiliki penurunan yang formal. Tetapi kita dapat membuatnya lebih ringkas dengan (1)  $f(t)$  adalah fungsi kontinu dan dapat diturunkan dan (2) fungsi ini terintegralkan pada selang tak hingga, seperti yang sudah kita asumsikan.

Integral ini akan konvergen pada  $f(t)$  dengan  $f(t)$  adalah fungsi kontinu, dan konvergen pada rata-rata limit kiri dan kanan dari  $f(t)$  pada titik tak konin, sama seperti deret Fourier.

**Contoh 5.1.1.** (a) Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

(b) Tunjukkan bahwa

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega t \sin \omega}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{jika } -1 < t < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{jika } |t| = 1 \\ 0 & \text{jika } |t| > 1 \end{cases}$$

(c) Tunjukkan bahwa

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

**Solusi 5.1.1.** (a)

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \omega t dt = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega}.$$

Karena  $f(t)$  merupakan fungsi genap

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin \omega t dt = 0.$$

Sehingga integral Fouriernya diberikan oleh

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega.$$

(b) Dalam selang  $-1 < t < 1$ ,  $f(t) = 1$ , maka

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \text{untuk } -1 < t < 1.$$

Pada  $|t| = 1$ , yang merupakan titik diskontinu, integral Fouriernya konvergen pada rata-rata 1 dan 0 yakni  $1/2$ . Sehingga

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega d\omega,$$

atau

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega d\omega = \frac{\pi}{4}.$$

Untuk  $|t| > 1$ ,  $f(t) = 0$ . Maka

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega = \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega.$$

(c) Secara khusus pada  $t = 0$ ,

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t d\omega = \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega.$$

Pada  $t = 0$ ,  $f(0) = 1$ , maka

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$


---



---

### 5.1.1 Integral Fourier Cosinus dan Sinus

Jika  $f(t)$  sebuah fungsi genap maka,

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = 0$$

dan

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos t \, d\omega.$$

Hal ini dikenal sebagai integral Fourier cosinus. Jika  $f(t)$  sebuah fungsi ganjil, maka

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 0,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

dan

$$f(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega,$$

yang dikenal sebagai integral Fourier sinus.

Perhatikan bahwa fungsi ini diharapkan terdefinisi dari  $-\infty$  sampai  $\infty$ , tetapi karena adanya paritas fungsi, untuk mendefinisikan transformasinya kita hanya memerlukan fungsinya dari 0 sampai  $\infty$ . Hal ini juga berarti kita hanya tertarik pada selang 0 sampai  $\infty$ , kita dapat mendefinisikan fungsinya dari  $-\infty$  sampai 0 dengan cara yang kita inginkan, sehingga kita bisa memperoleh baik itu integral cosinus maupun integral sinus dengan memperluas fungsinya dalam jangkauan negatifnya baik dalam bentuk genap maupun ganjil. Di sini, integral Fourier cosinus dan sinus ekuivalen dengan ekspansi setengah jangkauan deret Fourier.

**Contoh 5.1.2.** Carilah integral Fourier cosinus dan sinus dari

$$f(t) = e^{-st}, \quad t > 0, \quad s > 0.$$

**Solusi 5.1.2.** Untuk integral Fourier cosinus, kita dapat membayangkan  $f(t)$  adalah fungsi genap terhadap  $t = 0$ , maka

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt.$$

Integral ini dapat dihitung dengan integral parsial dua kali (**buktikan!!**). Tetapi di sini kita akan menggunakan metode yang disebut sebagai transformasi Laplace yang akan kita pelajari setelah ini. Integral ini tidak lain hanyalah transformasi Laplace dari  $\cos \omega t$ . Sehingga

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Sehingga integral Fourier cosinusnya diberikan oleh

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, dt = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{s^2 + \omega^2} \, dt.$$

Karena  $f(t) = e^{-st}$  hasil integral cosinus ini adalah

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{s^2 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2s} s^{-st},$$

sebuah rumus yang juga bisa didapatkan dengan integral kontur. Secara khusus untuk  $t = 0$  kita mempunyai

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2s}.$$

Dengan cara yang sama, untuk integral Fourier sinus, kita bisa membayangkan bahwa fungsi  $f(t)$  adalah fungsi ganjil. Dalam kasus ini

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

sebagai integral yang tidak lain adalah transformasi Laplace dari  $\sin \omega t$ . Sehingga integral Fourier sinus diberikan oleh

$$f(t) = e^{-st} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sin \omega t \, d\omega.$$

Dari sini kita bisa memperoleh rumus integral lain

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{s^2 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-st}.$$

**Contoh 5.1.3.** Carilah  $f(t)$ , jika  $f(t)$  adalah sebuah fungsi genap dan

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos at \, dt = \begin{cases} 1 - a & \text{jika } 0 \leq a \leq 1, \\ 0 & \text{jika } a > 1 \end{cases}$$

**Solusi 5.1.3.** Kita dapat menggunakan integral Fourier cosinus untuk menyelesaikan persamaan integral ini. Misalkan

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(1 - \omega) & \text{jika } 0 \leq \omega \leq 1, \\ 0 & \text{jika } \omega > 1, \end{cases}$$

maka

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \int_0^1 \frac{2}{\pi} (1 - \omega) \cos \omega t \, d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2} (1 - \cos t). \end{aligned}$$

### 5.1.2 Transformasi Fourier Cosinus dan Sinus

Jika  $f(t)$  adalah sebuah fungsi genap, kita telah melihat bahwa fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam integral Fourier

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad (5.1)$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt. \quad (5.2)$$

Sekarang jika kita mendefinisikan sebuah fungsi

$$\widehat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \quad (5.3)$$

maka

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \widehat{f}_c(\omega).$$

Jika kita masukkan pada (5.1), kita mempunyai

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega. \quad (5.4)$$

Adanya simetri antara (5.3) dan (5.4) tidak dapat dihindari dan bukan sebuah kesalahan. Dua persamaan ini membuat sebuah bentuk yang dinamakan sebagai pasangan transformasi Fourier cosinus. Fungsi  $\widehat{f}_c(\omega)$  dikenal sebagai transformasi Fourier cosinus. Rumus (5.4) memberikan  $f(t)$  kembali dari  $\widehat{f}_c(\omega)$ , sehingga disebut sebagai invers transformasi Fourier cosinus dari  $\widehat{f}_c(\omega)$ . Proses untuk mendapatkan transformasi  $\widehat{f}_c(\omega)$  dari sebuah fungsi  $f(t)$  juga disebut transformasi Fourier cosinus dan dinyatakan dengan  $F_c\{f(t)\}$ , yang berarti, ketika  $F_c$  bekerja pada  $f(t)$  maka memberikan  $\widehat{f}_c(\omega)$ ,

$$F_c\{f(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \widehat{f}_c(\omega).$$

Operasi balikkannya dikenal sebagai invers transformasi Fourier cosinus dan dinyatakan dengan  $F_c^{-1}\{\widehat{f}_c(\omega)\}$ ,

$$F_c^{-1}\{\widehat{f}_c(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega = f(t).$$

Dengan cara yang sama, jika  $f(t)$  adalah fungsi ganjil, kita memiliki pasangan transformasi Fourier sinus

$$F_s\{f(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = \widehat{f}_s(\omega),$$

$$F_s^{-1}\{\widehat{f}_s(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega = f(t).$$

Perhatikan bahwa integral Fourier dan transformasi Fourier secara esensi sama. Modifikasi pada konstanta sebagai faktor pengali tidak begitu signifikan. Akan mudah dibuktikan jika kita mendefinisikan

$$\widehat{f}_c(\omega) = \alpha \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \quad (5.5)$$

maka

$$f(t) = \beta \int_0^{\infty} \widehat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad (5.6)$$

dengan

$$\beta = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha}.$$

Sehingga sepanjang

$$\alpha\beta = \frac{2}{\pi},$$

dengan  $\alpha$  sebuah bilangan sebarang, (5.5) dan (5.6) tetap merupakan pasangan transformasi Fourier cosinus. Perlu diperhatikan, dalam berbagai literatur yang ada, terdapat berbagai konvensi dalam mendefinisikan transformasi Fourier. Perbedaannya adalah pada letak faktor  $2/\pi$ . Dengan menggunakan tabel yang ada, kita perlu memperhatikan letak dari faktor tersebut dalam definisi.

Pertanyaan selanjutnya adalah mengapa kita perlu dua nama untuk satu hal yang esensinya sama. Jawabnya adalah karena kita mempunyai dua cara pandang (persektif) yang berbeda dalam melihatnya. Dalam integral Fourier,  $f(t)$ , dideskripsikan sebagai gelombang cosinus (sinus) kontinu dan  $A(\omega)$  hanyalah amplitudo dari komponen harmonik  $f(t)$  dalam domain waktu. Sedangkan dalam transformasi Fourier,  $\widehat{f}_c(\omega)$  dianggap sebagai fungsi dalam domain frekuensi. Fungsi dalam domain frekuensi ini mendeskripsikan entitas yang sama dengan fungsi domain waktu  $f(t)$ . Terdapat banyak alasan mengapa kita sering bekerja dengan transformasi sebuah fungsi. Sebagai contoh, dalam domain frekuensi, kita bisa dengan mudah melakukan operasi yang secara matematik sulit dilakukan seperti diferensial dan integral hanya dengan penambahan dan perkalian.

**Contoh 5.1.4.** Tunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} F_c \{f'(t)\} &= \omega F_s \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0), \\ F_s \{f'(t)\} &= -\omega F_c \{f(t)\}, \\ F_c \{f''(t)\} &= \omega^2 F_c \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0), \\ F_s \{f''(t)\} &= -\omega^2 F_s \{f(t)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0). \end{aligned}$$

**Solusi 5.1.4.** Karena  $f(t)$  terintegralkan, kita mengasumsikan

$$f(t) \rightarrow 0 \quad \text{ketika} \quad t \rightarrow \infty$$

Dengan menggunakan integral parsial, kita dapat menghitung transformasi dari turunan

$$\begin{aligned} F_c \{f'(t)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{df}{dt} \cos \omega t \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ f(t) \cos \omega t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt} \cos \omega t \, dt \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -f(0) + \omega \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt \right] = \omega F_s \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s \{f'(t)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{df}{dt} \sin \omega t \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ f(t) \sin \omega t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt} \sin \omega t \, dt \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -\omega \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt \right] = -\omega F_c \{f(t)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_c \{f''(t)\} &= F_c \{[f'(t)]'\} = \omega F_s \{f'(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \\ &= \omega [-\omega F_c \{f(t)\}] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) = -\omega^2 F_c \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s \{f''(t)\} &= F_s \{[f'(t)]'\} = -\omega F_c \{f'(t)\} \\ &= -\omega \left[ \omega F_s \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \right] = -\omega^2 F_s \{f(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0). \end{aligned}$$

**Contoh 5.1.5.** Gunakan transformasi dari turunan untuk membuktikan

$$F_s \{e^{-at}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

**Solusi 5.1.5.** Misalkan  $f(t) = e^{-at}$ , sehingga  $f(0) = 1$  dan

$$f'(t) = -ae^{-at}, \quad f''(t) = a^2 e^{-at} = a^2 f(t).$$

maka

$$F_s \{f''(t)\} = F_s \{a^2 f(t)\} = a^2 F_s \{f(t)\}.$$

Tetapi

$$F_s \{f''(t)\} = -\omega^2 F_s \{f(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$$

kita mendapatkan

$$-\omega^2 F_s \{f(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} = a^2 F_s \{f(t)\}$$

atau

$$(a^2 + \omega^2) F_s \{f(t)\} = \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Sehingga

$$F_s \{f(t)\} = F_s \{e^{-at}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

**Contoh 5.1.6.** Gunakan transformasi Fourier sinus untuk menyelesaikan persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned} y''(t) - 9y(t) &= 50e^{-2t}, \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

**Solusi 5.1.6.** Karena kita tertarik pada daerah positif, kita dapat mengambil  $y(t)$  sebagai fungsi ganjil dan melakukan transformasi Fourier sinus. Jelas dari definisinya bahwa transformasi Fourier tersebut linier

$$F_s \{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_s \{f_1(t)\} + bF_s \{f_2(t)\}.$$

Dengan menggunakan sifat ini dan melakukan transformasi kedua ruas dari persamaan diferensial, kita mempunyai

$$F_s \{y''(t)\} - 9F_s \{y(t)\} = 50F_s \{e^{-2t}\}.$$

Karena

$$F_s \{y''(t)\} = -\omega^2 F_s \{y(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} y(0).$$

sehingga

$$-\omega^2 F_s \{y(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0 - 9F_s \{y(t)\} = 50F_s \{e^{-2t}\},$$

setelah kita kumpulkan suku-sukunya

$$(\omega^2 + 9) F_s \{y(t)\} = -50 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + 4} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0.$$

Sehingga

$$F_s \{y(t)\} = -50 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + 4} \frac{1}{(\omega^2 + 9)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0 \frac{\omega}{(\omega^2 + 9)}.$$

Dengan pecahan parsial dari

$$\frac{1}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)} = \frac{1}{5} \frac{1}{\omega^2 + 4} - \frac{1}{5} \frac{1}{\omega^2 + 9}$$



kita mempunyai

$$\begin{aligned} F_s \{y(t)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} 10 \frac{\omega}{\omega^2 + 9} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} 10 \frac{\omega}{\omega^2 + 4} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0 \frac{\omega}{(\omega^2 + 9)} \\ &= (10 + y_0) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + 9} - 10 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + 4} \\ &= (10 + y_0) F_s \{e^{-3t}\} - 10 F_s \{e^{-2t}\} \end{aligned}$$

Dengan mengambil transformasi invers, kita mendapatkan solusi

$$y(t) = (10 + y_0) e^{-3t} - 10e^{-2t}$$

## 5.2 Tabel Transformasi Fourier

Terdapat banyak tabel transformasi Fourier yang lengkap. Daftar ringkas dari transformasi Fourier cosinus dan sinus diberikan pada Tabel 5.1 dan 5.2 sedangkan tabel pendek dari transformasi Fourier yang akan kita jelaskan pada Subbab 5.3 diberikan pada Tabel 5.3.

## 5.3 Transformasi Fourier

Seperti yang sudah kita lihat, deret Fourier sebuah fungsi berulang pada interval  $2p$ , dapat juga dituliskan dalam bentuk kompleks

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{p} t}, \quad c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i \frac{n\pi}{p} t} dt,$$

sehingga

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i \frac{n\pi}{p} t} dt \right] e^{i \frac{n\pi}{p} t}.$$

Mari kita definisikan lagi

$$\omega_n = \frac{n\pi}{p}$$

dan

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{p},$$

kemudian menuliskan persamaan sebagai

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p f(t) e^{i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{f}_p(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

dengan

$$\hat{f}_p(\omega) = \int_{-p}^p f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Tabel 5.1: Tabel Transformasi Fourier Cosinus

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widehat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega$	$\widehat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt$
$\begin{cases} 1 & \text{jika } 0 < t < a \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$
$t^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{\omega^a} \cos \frac{a\pi}{2}$
$e^{-at} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{t^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a\omega}$
$t^n e^{-at} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + \omega^2)^{n+1}} \operatorname{Re}(a + i\omega)^{n+1}$
$\begin{cases} \cos t & \text{jika } 0 < t < a \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[ \frac{\sin a(1 - \omega)}{1 - \omega} + \frac{\sin a(1 + \omega)}{1 + \omega} \right]$
$\cos at^2 \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{1}{2a}} \cos \left( \frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$
$\frac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(a - \omega)$

Linieritas dari transformasi dan invers:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \qquad \alpha \widehat{f}_c(\omega) + \beta \widehat{g}_c(\omega)$$

Transformasi turunan:

$$\begin{aligned} f'(t) & \qquad \omega \widehat{f}_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \\ f''(t) & \qquad -\omega^2 \widehat{f}_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \end{aligned}$$

Teorema konvolusi:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty [f(|t-x|) - f(|t+x|)] g(x) \, dx \qquad \widehat{f}_c(\omega) \widehat{g}_s(\omega)$$

Tabel 5.2: Tabel Transformasi Fourier sinus

$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widehat{f}_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega$	$\widehat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$
$\begin{cases} 1 & \text{jika } 0 < t < a \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos a\omega}{\omega}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
$t^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{\omega^a} \sin \frac{\alpha\pi}{2}$
$e^{-t}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}$
$\frac{t}{t^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega}$
$t^n e^{-at} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + \omega^2)^{n+1}} \operatorname{Im}(a + i\omega)^{n+1}$
$te^{-at^2} \quad (a > 0)$	$\frac{\omega}{(2a)^{3/2}} e^{-\omega^2/4a}$
$\begin{cases} \sin t & \text{jika } 0 < t < a \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[ \frac{\sin a(1 - \omega)}{1 - \omega} - \frac{\sin a(1 + \omega)}{1 + \omega} \right]$
$\frac{\cos at}{t} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(\omega - a)$
Linieritas dari transformasi dan invers:	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \widehat{f}_s(\omega) + \beta \widehat{g}_s(\omega)$
Transformasi turunan:	
$f'(t)$	$-\omega \widehat{f}_c(\omega)$
$f''(t)$	$-\omega^2 \widehat{f}_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0)$
Teorema konvolusi:	
$\frac{1}{2} \int_0^\infty [f( t-x ) - f( t+x )] g(x) \, dx$	$\widehat{f}_c(\omega) \widehat{g}_s(\omega)$

Tabel 5.3: Tabel Transformasi Fourier:  $u$  adalah Fungsi Tangga Heaviside

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \widehat{f}(\omega) d\omega$	$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$
$\frac{1}{t^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
$u(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a + i\omega}$
$u(-t)e^{at}$	$\frac{1}{a - i\omega}$
$e^{-a t } \quad (a > 0)$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-t^2}$	$\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$
$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-t^2/(2a)^2} \quad (a > 0)$	$e^{-a^2\omega^2}$
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
$u(t+a) - u(t-a)$	$\frac{2 \sin \omega a}{\omega}$
$\delta(t-a)$	$e^{-i\omega a}$
$f(at+b) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} e^{ib\omega/a} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Linieritas dari transformasi dan invers:	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \widehat{f}(\omega) + \beta \widehat{g}(\omega)$
Transformasi turunan:	
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$
Transformasi integral:	
$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx$	$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \widehat{g}(\omega)$
Teorema Konvolusi:	
$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx$	$\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi} \widehat{f}(\omega) * \widehat{g}(\omega)$

Sekarang jika  $p \rightarrow \infty$ , maka  $\Delta\omega \rightarrow 0$  dan  $\omega_n$  menjadi variabel kontinu. Selanjutnya

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} \widehat{f}_p(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (5.8)$$

dan jumlah tak hingga dari (5.7) menjadi sebuah integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.9)$$

yang dikenal sebagai integral Fourier.

Fungsi koefisien  $\widehat{f}(\omega)$  dikenal sebagai transformasi Fourier dari  $f(t)$ . Proses mentransformasikan fungsi  $f(t)$  dari domain waktu menjadi fungsi yang sama  $\widehat{f}(\omega)$  dalam domain frekuensi dinyatakan sebagai  $\mathcal{F}\{f(t)\}$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \widehat{f}(\omega) \quad (5.10)$$

Proses untuk mendapatkan kembali  $f(t)$  dari  $\widehat{f}(\omega)$  dinamakan invers transformasi Fourier  $\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\}$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t). \quad (5.11)$$

Kita telah menurunkan pasangan transformasi Fourier ini dengan argumen yang sama ketika kita memperkenalkan transformasi Fourier cosinus. Komentar yang ada di sana juga berlaku di sini. Rumus (5.10) dan (5.11) juga bisa didapatkan dengan (1)  $f(t)$  kontinu dan dapat diturunkan dan (2) terintegralkan mutlak, yakni  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  berhingga.

Faktor pengali di depan integral sebarang. Jika  $f(t)$  dari  $\widehat{f}(\omega)$  didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \widehat{f}(\omega),$$

maka  $\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\}$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t),$$

dengan

$$\alpha\beta = \frac{1}{2\pi}.$$

Beberapa penulis memilih  $\alpha = \beta = \sqrt{1/2\pi}$  sehingga pasangan transformasi Fouriernya simetrik. Penulis lain memilih  $\alpha = 1/2\pi$ ,  $\beta = 1$ . Dalam (5.10) dan (5.11)  $\alpha$  dipilih 1 dan  $\beta = 1/2\pi$ .

Konvensi lain yang biasa digunakan dalam analisis spektrum adalah menggunakan frekuensi  $\nu$  dibandingkan frekuensi sudut  $\omega$  dalam mendefinisikan transformasi Fourier. Karena  $\omega = 2\pi\nu$ , (5.10) dapat dituliskan sebagai:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \widehat{f}(\nu) \quad (5.12)$$

dan (5.11) menjadi

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = f(t). \quad (5.13)$$

Perhatikan bahwa dalam pasangan persamaan ini, faktor  $2\pi$  sudah tidak ada lagi. Di samping itu, frekuensi adalah konsep yang terdefinisi dengan baik dan tak seorangpun mengukur frekuensi sudut. Terdapat alasan yang baik untuk menggunakan (5.12) dan (5.13) sebagai definisi transformasi Fourier. Tetapi untuk alasan sejarah, sebagian besar buku teknik dan fisika menggunakan  $\omega$ . Sehingga kita akan tetap menggunakan (5.10) dan (5.11) sebagai definisi transformasi Fourier.

Fungsi  $f(t)$  dalam transformasi Fourier ini bisa memiliki ataupun tidak paritas baik ganjil ataupun genap. Tetapi jika fungsinya adalah fungsi genap, maka akan dengan mudah dibuktikan bahwa transformasinya akan direduksi menjadi transformasi Fourier cosinus, sedangkan jika fungsi ganjil, maka akan direduksi menjadi transformasi Fourier sinus.

**Contoh 5.3.1.** Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

**Solusi 5.3.1.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+i\omega}. \end{aligned}$$

Hasil ini tentunya dapat dinyatakan dalam suku riil dan imajiner

$$\frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{1}{\alpha+i\omega} \frac{\alpha-i\omega}{\alpha-i\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - i \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

**Contoh 5.3.2.** Carilah invers transformasi Fourier dari

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\alpha+i\omega}.$$

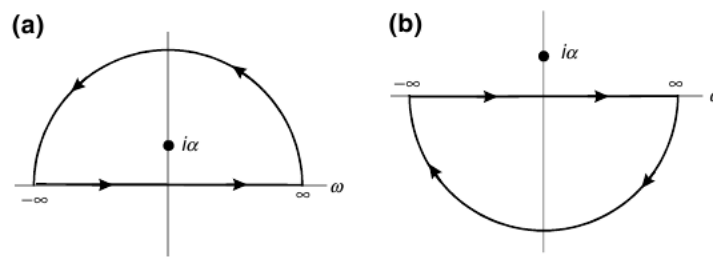
(Soal ini dapat dilewati jika belum mempelajari integrasi kontur kompleks.)

**Solusi 5.3.2.**

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha+i\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega-i\alpha} e^{i\omega t} d\omega.$$

Integral ini dapat dihitung dengan integral kontur. Untuk  $t > 0$ , konturnya dapat ditutup berlawanan arah dengan jarum jam pada separuh bidang bagian atas seperti pada Gambar 5.1(a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega-i\alpha} e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{setengah bidang bagian atas}} \frac{1}{\omega-i\alpha} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \lim_{\omega \rightarrow i\alpha} e^{i\omega t} = e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$



Gambar 5.1: kontur untuk invers transformasi Fourier. (a) kontur tertutup pada setengah bidang bagian atas. (b) Kontur tertutup pada setengah bidang bagian bawah.

Dari sini untuk  $t > 0$ :

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \hat{f}(\omega) \} = e^{-\alpha t}.$$

Untuk  $t < 0$ , kontur tertutup searah jarum jam dalam setengah bidang bagian bawah seperti pada Gambar 5.1(b). Karena tidak terdapat titik singular pada setengah bidang bagian bawah

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - i\alpha} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{setengah bidang bagian bawah}} \frac{1}{\omega - i\alpha} e^{i\omega t} d\omega = 0.$$

Untuk  $t < 0$ ,

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \hat{f}(\omega) \} = 0$$

Dengan menggunakan fungsi tangga Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } t > 0, \\ 0 & \text{untuk } t < 0, \end{cases}$$

kita dapat mengkombinasikan hasil untuk  $t > 0$  dan untuk  $t < 0$  sebagai:

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \hat{f}(\omega) \} = u(t) e^{-\alpha t}.$$

Terlihat bahwa invers transformasi Fourier sama dengan  $f(t)$  pada contoh sebelumnya.

## 5.4 Transformasi Fourier dan Fungsi Delta

### 5.4.1 Ortogonalitas

Jika kita meletakkan  $\hat{f}(\omega)$  pada (5.8) kembali pada integral Fourier (5.9), representasi Fourier  $f(t)$  berbentuk

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right] e^{i\omega t} d\omega,$$

yang setelah integrasi diperoleh

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right] dt'.$$

Ingat kembali fungsi delta Dirac  $\delta(t - t')$  yang didefinisikan oleh hubungan

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t - t') dt'.$$

Dengan membandingkan dua buah persamaan terakhir,  $\delta(t - t')$  dapat dituliskan sebagai

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega. \quad (5.14)$$

Dengan mengganti variabel, kita memperoleh bentuk balikkannya

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt.$$

Dua buah persamaan terakhir adalah kondisi ortogonalitas. Sebuah fungsi  $e^{i\omega t}$  ortogonal dengan semua fungsi dalam bentuk  $e^{-i\omega' t}$  ketika diintegrasikan untuk semua  $t$  sepanjang  $\omega' \neq \omega$ .

Karena  $\delta(x) = \delta(-x)$ , (5.14) dapat ditulis

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega.$$

Rumus ini sangat berguna dalam representasi fungsi delta. Penurunan pasangan transformasi lebih sederhana dengan penggunaan fungsi delta. Meskipun fungsi ini bukan fungsi matematik yang tepat, penggunaannya dapat dibenarkan oleh teori distribusi.

### 5.4.2 Transformasi Fourier Melibatkan Fungsi Delta

*Fungsi Delta Dirac* Perhatikan fungsi berikut

$$f(t) = K\delta(t),$$

dengan  $K$  merupakan sebuah konstanta. Transformasi Fourier  $f(t)$  dengan mudah diturunkan dengan menggunakan fungsi delta

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t) e^{-i\omega t} dt = Ke^0 = K.$$

Invers fungsinya diberikan oleh

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{i\omega t} dt = K\delta(t).$$

Dengan cara yang sama, transformasi Fourier sebuah fungsi konstan  $K$  adalah

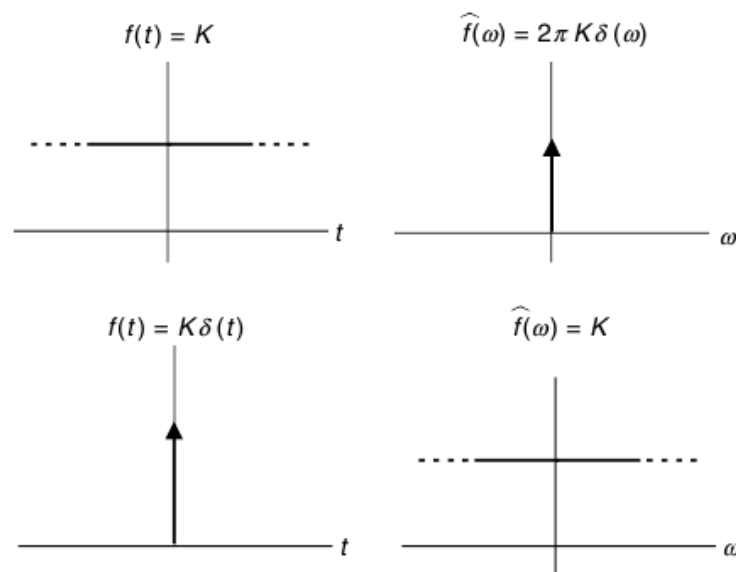
$$\mathcal{F}\{K\} = 2\pi K\delta(\omega)$$

dan inversnya

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi K\delta(\omega)\} = K.$$

Pasangan transformasi Fourier ini diilustrasikan pada Gambar 5.2.





Gambar 5.2: transformasi Fourier untuk fungsi konstan dan fungsi delta. Transformasi Fourier fungsi konstan adalah fungsi delta. Transformasi Fourier fungsi delta adalah fungsi konstan.

*Fungsi Periodik* Untuk mengilustrasikan transformasi Fourier fungsi periodik, perhatikan fungsi berikut

$$f(t) = A \cos \omega_0 t.$$

Transformasi Fouriernya diberikan oleh

$$\mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt.$$

Karena

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}),$$

sehingga

$$\mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t}] dt.$$

Dengan menggunakan (5.14) kita memiliki

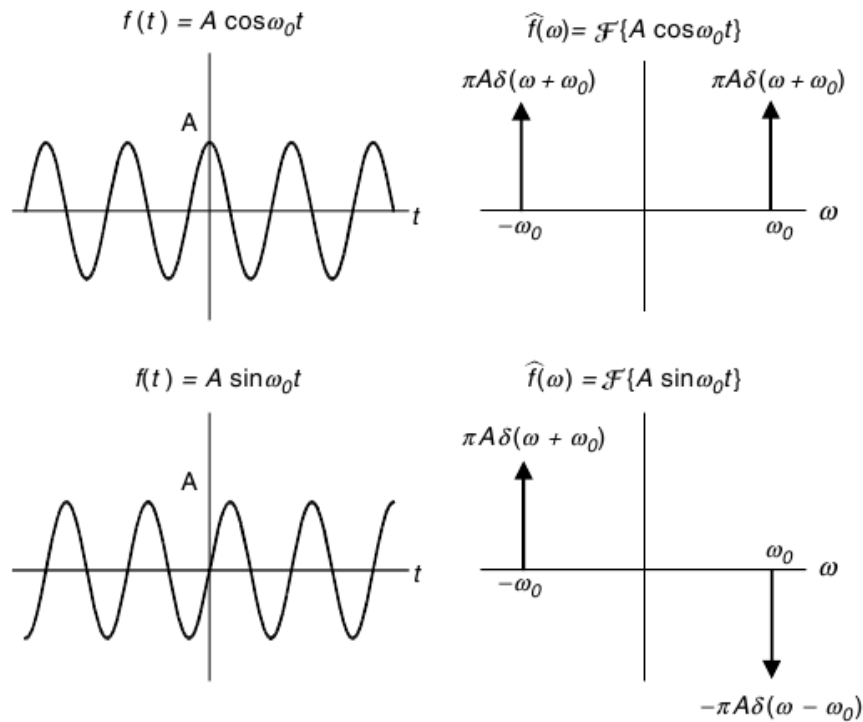
$$\mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} = \pi A \delta(\omega + \omega_0) + \pi A \delta(\omega - \omega_0). \quad (5.15)$$

Dengan cara yang sama

$$\mathcal{F}\{A \sin \omega_0 t\} = i\pi A \delta(\omega + \omega_0) - i\pi A \delta(\omega - \omega_0). \quad (5.16)$$

Perhatikan bahwa transformasi Fourier dari fungsi sinus adalah imajiner.

Pasangan transformasi Fouriernya bisa dilihat pada Gambar 5.3, meninggalkan faktor  $i$  pada (5.16)



Gambar 5.3: transformasi Fourier untuk fungsi sinus dan cosinus.

### 5.4.3 Pasangan Transformasi Fourier Tiga Dimensi

Sejauh ini kita telah menggunakan variabel  $t$  dan  $\omega$  untuk merepresentasikan waktu dan frekuensi sudut. Matemaika, tentunya, akan tetap sama jika kita merubah nama variabelnya. Dalam mendeskripsikan variasi ruang sebuah gelombang, biasanya kita menggunakan  $r$ ,  $x$   $y$  dan  $z$  untuk merepresentasikan jarak. Dalam fungsi waktu, periode  $T$  adalah interval waktu pada saat fungsi tersebut berulang. Dalam fungsi jarak, fungsi yang sama dikenal sebagai panjang gelombang  $\lambda$ , yaitu pertambahan jarak ketika fungsi tersebut berulang. Sehingga jika  $t$  diganti  $r$ , maka frekuensi sudut  $\omega$  yang sama dengan  $2\pi/T$  haruslah diganti dengan kuantitas yang sama dengan  $2\pi/\lambda$  yang dikenal sebagai bilangan gelombang  $k$ .

Sehingga, berkaitan dengan (5.14), kita mempunyai

$$\begin{aligned}\delta(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-x')} dk_1, \\ \delta(y - y') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_2(y-y')} dk_2, \\ \delta(z - z') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_3(z-z')} dk_3.\end{aligned}$$

Sehingga dalam ruang tiga dimensi, fungsi delta diberikan oleh

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \delta(y - y') \delta(y - y') \delta(z - z') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-x')} dk_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_2(y-y')} dk_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_3(z-z')} dk_3 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[k_1(x-x') + k_2(y-y') + k_3(z-z')]} dk_1 dk_2 dk_3.\end{aligned}$$

Notasi yang biasa digunakan adalah dengan memperkenalkan sebuah vektor gelombang  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} = k_1 \hat{\mathbf{i}} + k_2 \hat{\mathbf{j}} + k_3 \hat{\mathbf{k}}$$

dan juga

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x') \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}}$$

fungsi delta tiga dimensi dapat dituliskan sebagai

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3k.$$

Sekarang dengan menggunakan definisi fungsi delta

$$f(\mathbf{r}) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3r'.$$

kita mempunyai

$$f(\mathbf{r}) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}') \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3k d^3r',$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^3r' \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k.$$

Sehingga dalam tiga dimensi kita memiliki pasangan transformasi Fourier

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r = \mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\}, \\ f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\mathbf{k})\}.\end{aligned}$$

Lagi, bagaimana kita memisahkan faktor  $1/(2\pi)^3$  antara transformasi Fourier dengan inversnya adalah sebarang. Di sini kita memisahkan sama besar agar memiliki kesesuaian dengan kebanyakan buku mekanika kuantum.

Dalam mekanika kuantum, momentum  $\mathbf{p}$  diberikan oleh  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . Pasangan transformasi Fourier dalam suku  $\mathbf{r}$  dan  $\mathbf{p}$  diberikan oleh

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar} d^3r, \\ f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar} d^3p.\end{aligned}$$

Jika  $f(\mathbf{r})$  adalah fungsi gelombang Schrödinger, maka transformasi Fourier  $\hat{f}(\mathbf{p})$  adalah fungsi gelombang momentumnya. Dalam mendeskripsikan sebuah fungsi dinamik, fungsi gelombang ruang atau momentum dapat digunakan, bergantung mana yang lebih nyaman untuk permasalahan tertentu.

Jika dalam ruang tiga dimensi, fungsinya memiliki bentuk simetri bola, yakni  $f(\mathbf{r}) = f(r)$ , sehingga transformasi Fouriernya direduksi menjadi integral satu dimensi. Dalam kasus ini, misalkan bilangan gelombang  $\mathbf{k}$  sepanjang sumbu- $z$  dalam ruang koordinat, sehingga

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$$

dan

$$d^3r = r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr \, d\varphi.$$

Transformasi Fourier dari  $f(r)$  menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty f(r) \left[ \int_0^\pi e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta \, d\theta \right] r^2 \, dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} 2\pi \int_0^\infty f(r) \left[ \frac{1}{ikr} e^{-ikr \cos \theta} \right]_0^\pi r^2 \, dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} 2\pi \int_0^\infty f(r) \frac{2 \sin kr}{kr} r^2 \, dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty f(r) r \sin kr \, dr \end{aligned}$$

**Contoh 5.4.1.** Carilah transformasi Fourier dari

$$f(\mathbf{r}) = \frac{z^3}{\pi} e^{-2zr},$$

**Solusi 5.4.1.**

$$\mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{z^3}{\pi} e^{-2zr} r \sin kr \, dr$$

Salah satu cara untuk menghitung integral ini adalah dengan mengingat kembali transformasi Laplace dari  $\sin kr$

$$\int_0^\infty e^{-sr} \sin kr \, dr = \frac{k}{s^2 + k^2},$$

turunkan terhadap  $s$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-sr} \sin kr \, dr &= \int_0^\infty (-r) e^{-sr} \sin kr \, dr, \\ \frac{d}{ds} \frac{k}{s^2 + k^2} &= \frac{-2sk}{(s^2 + k^2)^2}, \end{aligned}$$

maka

$$\int_0^\infty r e^{-sr} \sin kr \, dr = \frac{2sk}{(s^2 + k^2)^2}.$$

Dengan  $s = 2z$ , kita mempunyai

$$\int_0^\infty e^{-2zr} r \sin kr \, dr = \frac{4zk}{(4z^2 + k^2)^2}.$$

Sehingga

$$\mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \frac{z^3}{\pi} \frac{4zk}{(4z^2 + k^2)^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{2z^2}{(4z^2 + k^2)^2}.$$

## 5.5 Beberapa Pasangan Transformasi Penting

Terdapat beberapa prototipe pasangan transformasi Fourier yang sebaiknya kita familiar dengannya. Bukan hanya karena seringnya muncul dalam teknik maupun fisika, tetapi juga karena transformasi fungsi lainnya juga berdasarkan fungsi-fungsi ini.

### 5.5.1 Fungsi Pulsa Persegi

Fungsi persegi didefinisikan sebagai:

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & -a \leq t \leq a, \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Fungsi ini kadang juga disebut sebagai fungsi kotak atau fungsi atas topi. Fungsi ini dapat dinyatakan sebagai

$$\Pi(t) = u(t+a) - u(t-a)$$

dengan  $u(t)$  adalah fungsi tangga Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Transformasi Fourier fungsi ini diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\Pi'_a(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_a(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}}{-i\omega} = \frac{2 \sin \omega a}{\omega} = \widehat{f}(\omega) \end{aligned}$$

Dalam fungsi sinc, yang didefinisikan sebagai  $\text{sinc}(x) = \sin x/x$ , kita mempunyai

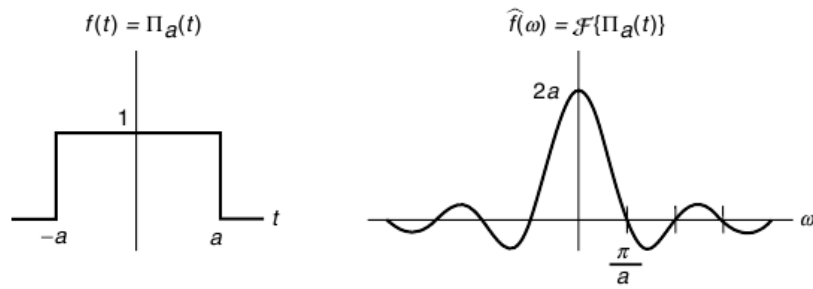
$$\mathcal{F}\{\Pi_a(t)\} = 2a \text{sinc}(a\omega)$$

Pasangan transformasi Fourier ini ditunjukkan pada Gambar 5.4.

### 5.5.2 Fungsi Gaussian

Fungsi Gaussian didefinisikan sebagai:

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}.$$



Gambar 5.4: Transformasi Fourier untuk fungsi persegi. Perhatikan bahwa  $\hat{f}(0) = 2a$ , dan nilai nol dari  $\hat{f}(\omega)$  adalah pada  $\omega = \pi/a, 2\pi/a, 3\pi/a, \dots$ .

Transformasi Fouriernya diberikan oleh

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha t^2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 - i\omega t} dt = \hat{f}(\omega).$$

Dengan melengkapi kuadrat dari eksponensial

$$\alpha t^2 + i\omega t = \left( \sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha},$$

kita memiliki

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[ \left( \sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha} \right] \right\} dt \\ &= \exp \left( -\frac{\omega^2}{4\alpha} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left( \sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}} \right)^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

Misalkan

$$u = \sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}, \quad du = \sqrt{\alpha} dt$$

sehingga kita bisa menuliskan transformasi Fouriernya sebagai

$$\hat{f}(\omega) = \exp \left( -\frac{\omega^2}{4\alpha} \right) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

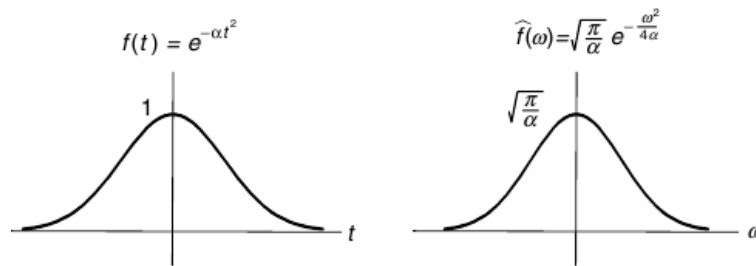
Karena

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

maka

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp \left( -\frac{\omega^2}{4\alpha} \right).$$

Hal menarik yang perlu diperhatikan adalah  $\hat{f}(\omega)$  juga merupakan fungsi Gaussian dengan puncak pada titik asal, dan secara monotonik menurun ketika  $k \rightarrow \pm\infty$ . Jika  $f(t)$  memiliki puncak yang tajam ( $\alpha$  besar) maka  $\hat{f}(\omega)$  datar, begitu juga sebaliknya. Hal ini merupakan fitur yang umum dalam transformasi Fourier. Dalam mekanika kuantum, hal ini berkaitan dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg. Pasangan transformasi fungsi Gaussian ditunjukkan Gambar 5.5.



Gambar 5.5: Fourier sebuah fungsi Gaussian adalah fungsi Gaussian yang lain.



Gambar 5.6: Fourier sebuah fungsi yang meluruh eksponen adalah sebuah profil Lorentz.

### 5.5.3 Fungsi Meluruh secara Eksponen

Transformasi Fourier sebuah fungsi yang meluruh secara eksponen

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Fungsi ini memiliki bentuk seperti bel, memiliki penampakan yang sama dengan kurva Gaussian dan dikenal sebagai profil Lorentz. Pasangan transformasinya bisa dilihat pada Gambar 5.6.

## 5.6 Sifat-sifat Transformasi Fourier

### 5.6.1 Sifat Smetri

Sifat simetri transformasi Fourier sangatlah penting

$$\text{jika } \mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega), \quad \text{maka } \mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = 2\pi f(-\omega).$$

*Bukti.* Karena

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

dari definisi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Dengan menukar antara  $t$  dan  $\omega$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{i\omega t} dt.$$

Jelas bahwa

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Maka

$$\mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{-i\omega t} dt = 2\pi f(-\omega).$$

Dengan mengguakan hubungan sederhana ini, kita bisa menghindari manipulasi matematika yang rumit.

**Contoh 5.6.1.** Carilah

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{a^2 + t^2}\right\}$$

dari

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

**Solusi 5.6.1.** Misalkan

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad \text{maka } f(-\omega) = e^{-a|\omega|}$$

dan

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

Maka

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \frac{2a}{a^2 + t^2}, \\ \mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} &= F\left\{\frac{2a}{a^2 + t^2}\right\} = \pi f(-\omega). \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{a^2 + t^2}\right\} = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

Hasil ini juga bisa didapatkan dengan integral kontur kompleks.



### 5.6.2 Linieritas, Pergeseran, Penskalaan

#### Linieritas Transformasi dan Inversnya

Jika  $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$  dan  $\mathcal{F}\{g(t)\} = \hat{g}(\omega)$ , maka

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [af(t) + bg(t)]e^{-i\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\} = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)\} &= a\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} + b\mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}(\omega)\} \\ &= af(t) + bg(t).\end{aligned}$$

Hubungan sederhana ini sangat penting karena merefleksikan kegunaan transformasi Fourier dalam analisis sistem linier.

#### Pergeseran Waktu

Jika waktu digeser sebesar  $a$  dalam transformasi Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t} dt,$$

dengan substitusi  $t-a = x$ ,  $dt = dx$ ,  $t = x+a$ , kita memiliki

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(x+a)} dx \\ &= e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa waktu tunda dalam transformasi Fourier hanya akan merubah fase bukan besarnya (magnitudo). Sebagai contoh

$$\sin \omega_0 t = \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \omega_0 \left( t - \frac{\pi}{2\omega_0} \right),$$

Sehingga jika  $f(t) = \cos \omega_0 t$ , maka  $\sin \omega_0 t = f(t-a)$  dengan  $a = \frac{\pi}{2\omega_0}$ . Kita memiliki

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{A \sin \omega_0 t\} &= e^{-i\omega \frac{\pi}{2\omega_0}} \mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} \\ &= e^{-i\omega \frac{\pi}{2\omega_0}} [A\pi\delta(\omega - \omega_0) + A\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} A\pi\delta(\omega - \omega_0) + e^{i\frac{\pi}{2}} A\pi\delta(\omega + \omega_0) \\ &= -iA\pi\delta(\omega - \omega_0) + iA\pi\delta(\omega + \omega_0),\end{aligned}$$

seperti pada (5.16)

### Pergeseran Frekuensi

Jika frekuensi dalam  $\widehat{f}(\omega)$  digeser sebesar  $a$ , inversnya dikalikan dengan faktor  $e^{iat}$ . Karena

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega - a)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega - a) e^{i\omega t} f(t) d\omega,$$

dengan mengganti  $\varpi = \omega - a$ , kita mempunyai

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega - a)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\varpi) e^{i(\varpi+a)t} d\varpi = e^{iat} f(t)$$

atau

$$\widehat{f}(\omega - a) = F\{e^{iat} f(t)\}.$$

Untuk mengilustrasikan efek dari pergeseran frekuensi, marilah kita perhatikan kasus  $f(t)$  dikalikan dengan  $\cos \omega_0 t$ . Karena  $\cos \omega_0 t = (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})/2$ , maka

$$f(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{i\omega_0 t} f(t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t} f(t)$$

dan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t} f(t)\} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{f}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \widehat{f}(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Proses ini dikenal sebagai modulasi. Dengan kata lain ketika  $f(t)$  dimodulasi oleh  $\cos \omega_0 t$ , frekuensinya akan bergeser ke atas dan ke bawah secara simetrik sebesar  $\omega_0$ .

### Penskalaan Waktu

Jika  $\mathcal{F}\{f(at)\} = \widehat{f}(\omega)$ , maka transformasi Fourier dari  $f(at)$  dapat ditentukan dengan mengganti  $t' = at$  dalam integral Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'/a} \frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

Pernyataan ini benar untuk  $a > 0$ . Tetapi untuk  $a$  negatif, maka  $t' = at = -|a|t$ . Sebagai sebuah konsekuensi, ketika variabel integrasi dirubah dari  $t$  menjadi  $t'$ , batas integral juga harus dirubah. Dalam artian

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'/a} \frac{1}{-|a|} dt' \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'/a} dt' = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

Sehingga secara umum

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Hal ini berarti ketika skala waktu membesar, skala frekuensi bukan hanya berkontraksi mengecil, amplitudonya juga naik. Amplitudonya naik sedemikian rupa sehingga luas daerahnya tetap.

### Penskalaan Frekuensi

Hal ini hanyalah kebalikan dari penskalaan waktu. Jika  $\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = f(t)$ , maka

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(a\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(a\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega') e^{i\omega' t/a} \frac{1}{|a|} d\omega' = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right).\end{aligned}$$

Hal ini berarti ketika skala frekuensinya membesar, skala waktunya berkontraksi dan amplitudo fungsi waktu akan naik.

### 5.6.3 Transformasi Turunan

Jika transformasi turunan ke  $-n$  dari  $f^n(t)$  ada, maka  $f^n(t)$  haruslah terintegralkan sepanjang  $(-\infty, \infty)$ . Hal ini berarti  $f^n(t) \rightarrow 0$  ketika  $t \rightarrow \pm\infty$ . Dengan asumsi ini transformasi Fourier dari turunan  $f(t)$  dapat dinyatakan dalam suku transformasi  $f(t)$ . Hal ini tampak sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \\ &= f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt.\end{aligned}$$

Suku terintegralkan sama dengan nol pada kedua limit. Maka

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega F\{f(t)\} = i\omega \widehat{f}(\omega).$$

Dapat diperoleh

$$\mathcal{F}\{f''(t)\} = i\omega F\{f'(t)\} = (i\omega)^2 F\{f(t)\} = (i\omega)^2 \widehat{f}(\omega).$$

Sehingga

$$\mathcal{F}\{f^n(t)\} = (i\omega)^n F\{f(t)\} = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$$

Maka turunan dalam domain waktu menjadi perkalian sederhana dalam domain frekuensi.

### 5.6.4 Transformasi Integral

Transformasi Fourier dari integral berikut

$$I(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

dapat dengan mudah diperoleh dengan menggunakan transformasi Fourier turunan. Karena

$$\frac{d}{dt} I(t) = f(t),$$

didapatkan

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{dI(t)}{dt}\right\} = i\omega \mathcal{F}\{I(t)\} = i\omega \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(x) dx\right\}.$$

Maka

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t f(x) dx \right\} = \frac{1}{i\omega} F\{f(t)\}.$$

Sehingga integral dalam domain waktu menjadi pembagian dalam domain frekuensi.

### 5.6.5 Teorema Parseval

Teorema Parseval dalam deret Fourier juga berlaku untuk transformasi Fourier. Integral dari sebuah fungsi kuadrat dihubungkan dengan transformasi integral dari fungsi kuadrat dengan cara berikut

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Karena

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

kompleks konjugatnya

$$f^*(t) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] dt.$$

Dengan menukar integrasi  $\omega$  dan  $t$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega) \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Jika kita menuliskan dalam frekuensi  $\nu$ , bukan dalam frekuensi sudut  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ), teorema ini dapat dinyatakan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu.$$

Dalam fisika, energi total yang berkaitan dengan sebuah bentuk gelombang  $f(t)$  (radiasi elektromagnetik, gelombang air, dll) sebanding dengan  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ . Dengan teorema Parseval, energi juga diberikan oleh  $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu$ . Sehingga  $|\hat{f}(\nu)|^2$  adalah energi tiap satuan interval frekuensi dan dikenal sebagai **rapat energi**. Untuk alasan ini, teorema Parseval juga dikenal sebagai teorema energi.

**Contoh 5.6.2.** Carilah nilai dari

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

dengan teorema Parseval dan transformasi Fourier dari

$$\Pi_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

**Solusi 5.6.2.** Misalkan  $f(t) = \Pi_1(t)$ , sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_1(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = \frac{2 \sin \omega}{\omega} \end{aligned}$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-1}^1 dt = 2$$

Di sisi lain

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2 \sin \omega}{\omega} \right|^2 d\omega = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega.$$

Dari teorema Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

kita mempunyai

$$2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega.$$

Dari sini

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \pi$$

Karena  $\sin^2 \omega / \omega^2$  merupakan fungsi genap

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

## 5.7 Konvolusi

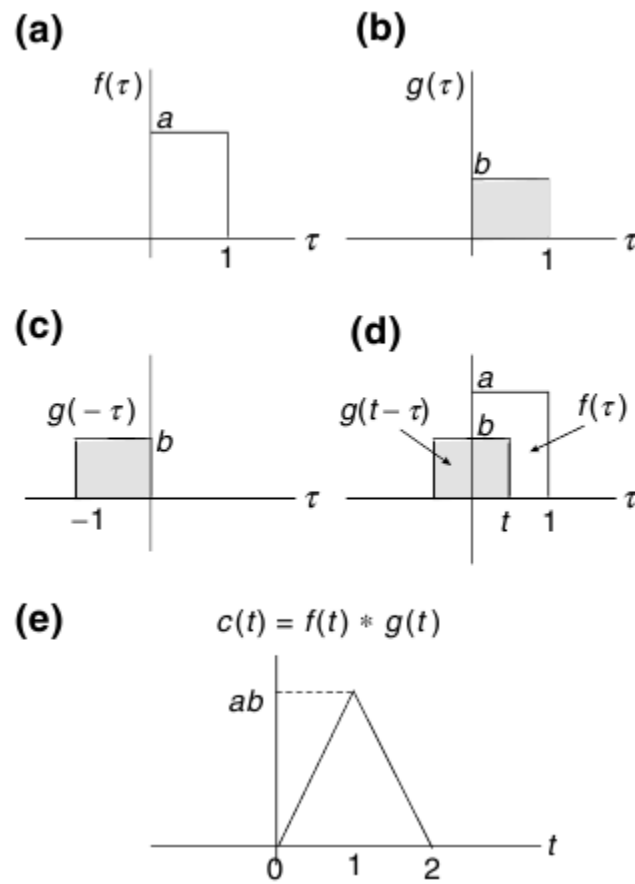
### 5.7.1 Operasi Matematik Konvolusi

Konvolusi merupakan konsep yang penting dan berguna. Konvolusi  $c(t)$  dari dua buah fungsi  $f(t)$  dan  $g(t)$  biasanya dituliskan sebagai  $f(t) * g(t)$  dan didefinisikan sebagai

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = f(t) * g(t)$$

Operasi matematik konvolusi terdiri dari langkah sebagai berikut:

1. Lakukan pencerminan  $g(\tau)$  terhadap sumbu koordinat sehingga diperoleh  $g(-\tau)$ .



Gambar 5.7: Konvolusi dari  $f(\tau)$  ditunjukkan pada (a) dan  $g(\tau)$  pada (b) dan diberikan pada (e).

2. Geser  $g(-\tau)$  sebesar  $t$  sehingga diperoleh  $g(t-\tau)$ . Jika  $t$  positif, maka pergeseran ke arah kanan, dan jika negatif maka pergeseran ke arah kiri.
3. Kalikan fungsi tergeser  $g(t-\tau)$  dengan  $f(\tau)$ .
4. Luas di bawah hasil perkalian  $g(t-\tau)$  dengan  $f(\tau)$  adalah nilai konvolusi pada  $t$ .

Marilah kita ilustrasikan dengan contoh sederhana pada Gambar 5.7. Misalkan  $f(\tau)$  diberikan pada (a) dan  $g(\tau)$  pada (b). Citra pencerminan  $g(\tau)$  adalah  $g(-\tau)$  yang diberikan oleh (c). Pada (d),  $g(t-\tau)$  adalah  $g(-\tau)$  yang digeser sebesar  $t$ .

Jelas di sini bahwa jika  $t < 0$  maka tidak ada overlap antara  $f(\tau)$  dan  $g(t-\tau)$ . Hal ini berarti, untuk sebarang nilai  $\tau$ , baik  $f(\tau)$  maupun  $g(t-\tau)$ , atau keduanya nol. Karena  $f(\tau)g(t-\tau) = 0$  untuk  $t < 0$ , maka

$$c(t) = 0, \quad \text{jika } t < 0.$$

Antara  $t = 0$  dan  $t = 1$ , integral konvolusi sama dengan  $abt$

$$c(t) = abt, \quad 0 < t < 1.$$

Terdapat overlap penuh pada  $t = 1$ , sehingga

$$c(t) = ab \quad \text{pada} \quad t = 1$$

Antara  $t = 1$  dan  $t = 2$ , overlapnya berkurang. Integral konvolusinya menjadi

$$c(t) = ab[1 - (t - 1)] = ab(2 - t), \quad \text{jika} \quad 1 < t < 2.$$

Untuk  $t > 2$ , tidak terdapat overlap dan integral konvolusinya sama dengan nol. Sehingga konvolusi  $f(t)$  dan  $g(t)$  diberikan oleh segitiga pada (e).

### 5.7.2 Teorema Konvolusi

#### Teorema Konvolusi Waktu

Teorema konvolusi waktu

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

dapat dibuktikan sebagai berikut.

Dari definisi

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt.$$

Dengan menukar integrasi  $t$  dan  $\tau$

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt \right] d\tau.$$

Misalkan  $t - \tau = x$ ,  $t = x + \tau$ ,  $dt = dx$ , maka

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega(x+\tau)} dx \\ &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega\tau}\hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}\hat{g}(\omega) = \hat{g}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \hat{g}(\omega)\hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

#### Teorema Konvolusi Frekuensi

Teorema konvolusi frekuensi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f} * \hat{g}(\omega)\} = 2\pi f(t)g(t).$$

Teorema ini pembuktiannya juga secara langsung. Dari definisi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\varpi)\hat{g}(\omega - \varpi) d\varpi \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\varpi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega - \varpi)e^{i\omega t} d\omega \right] d\varpi. \end{aligned}$$

Misalkan  $\omega - \varpi = \Omega$ ,  $\omega = \Omega + \varpi$ ,  $d\omega = d\Omega$ , maka

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega) * \widehat{g}(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\varpi) e^{i\varpi t} d\varpi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \\ &= 2\pi f(t)g(t).\end{aligned}$$

Jelas bahwa teorema ini dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(\omega) * \widehat{g}(\omega).$$

**Contoh 5.7.1.** (a). Gunakan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0), \\ \mathcal{F}\{II_a(t)\} &= \frac{2 \sin a\omega}{\omega},\end{aligned}$$

dan teorema konvolusi untuk mencari transformasi Fourier gelombang berikut

$$II_a(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & |t| < a, \\ 0 & |t| > a, \end{cases}$$

(b) Gunakan pengintegralan langsung untuk memverifikasi hasilnya.

**Solusi 5.7.1.** (a) Karena

$$II_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a, \\ 0 & |t| > a, \end{cases}$$

sehingga kita bisa menuliskan  $f(t)$  sebagai

$$f(t) = \cos \omega_0 t \cdot II_a(t).$$

Menurut teorema konvolusi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} * \mathcal{F}\{II_a(t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] * \frac{2 \sin a\omega}{\omega} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega' + \omega) + \delta(\omega' - \omega_0)] \frac{\sin a(\omega - \omega')}{(\omega - \omega')} d\omega' \\ &= \frac{\sin a(\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0} + \frac{\sin a(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0}.\end{aligned}$$

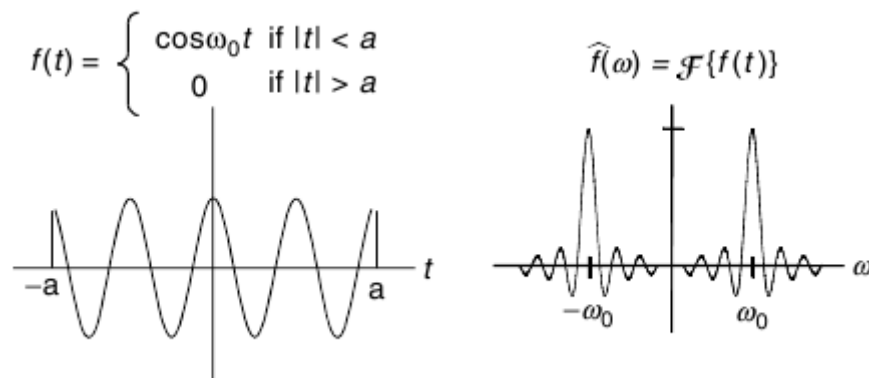
(b) Dari definisi

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt.$$

Karena

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}),$$





Gambar 5.8: Pasangan transformasi Fourier untuk gelombang cosinus berhingga.

sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left( e^{i(\omega_0 - \omega)t} + e^{-i(\omega_0 + \omega)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega)} \Big|_{-a}^a - \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t}}{i(\omega_0 + \omega)} \Big|_{-a}^a \right] \\ &= \frac{\sin a(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin a(\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0}. \end{aligned}$$

Pasangan transformasi Fourier ini ditunjukkan pada Gambar 5.8

**Contoh 5.7.2.** Carilah transformasi Fourier dari fungsi segitiga

$$f(t) = \begin{cases} t + 2a & -2a < t < 0, \\ -t + 2a & 0 < t < 2a, \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

**Solusi 5.7.2.** Dengan mengikuti prosedur seperti pada Gambar 5.7, dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa fungsi segitiga merupakan konvolusi dari dua buah fungsi pulsa persegi identik

$$f(t) = \Pi_a(t) * \Pi_a(t)$$

Menurut teorema konvolusi waktu

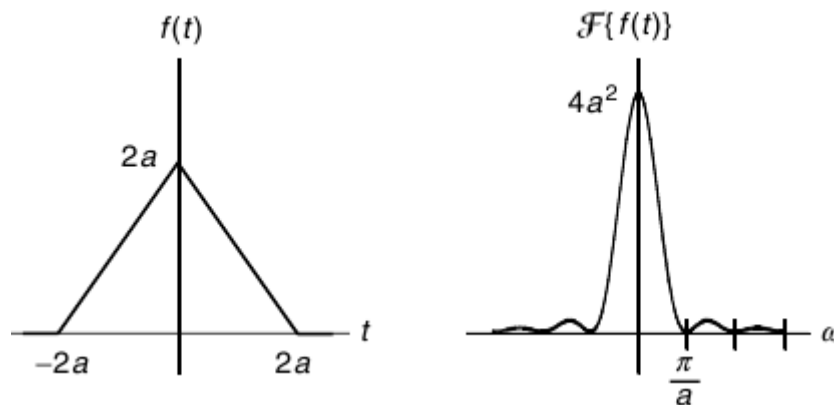
$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{\Pi_a(t) * \Pi_a(t)\} = \mathcal{F}\{\Pi_a(t)\} \mathcal{F}\{\Pi_a(t)\}.$$

Karena

$$\mathcal{F}\{\Pi_a(t)\} = \frac{2 \sin a\omega}{\omega},$$

maka

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{2 \sin a\omega}{\omega} \cdot \frac{2 \sin a\omega}{\omega} = \frac{4 \sin^2 a\omega}{\omega^2}.$$



Gambar 5.9: Transformasi Fourier fungsi segitiga

Pasangan transformasi ditunjukkan pada Gambar 5.9.

Kita dapat mendapatkan hasil yang sama dengan penghitungan langsung, tetapi akan jauh lebih rumit.

## 5.8 Transformasi Fourier dan Persamaan Diferensial

Sebuah sifat karakteristik dari transformasi Fourier adalah, sama seperti transformasi integral yang lain, yaitu dapat digunakan untuk mereduksi jumlah variabel bebas dalam persamaan diferensial sebanyak satu. Sebagai contoh, jika kita menggunakan transformasi pada persamaan diferensial biasa (yang hanya memiliki satu buah variabel bebas), maka kita mendapatkan sebuah persamaan aljabar untuk fungsi yang ditransformasikan. Persamaan gelombang satu dimensi adalah persamaan diferensial parsial dengan dua buah variabel bebas. Persamaan ini dapat ditransformasikan menjadi persamaan diferensial biasa. Biasanya jauh lebih mudah menyelesaikan persamaan dalam bentuk yang telah ditransformasikan dibandingkan dengan menyelesaikannya secara langsung dalam bentuk asalnya, karena variabelnya sudah berkurang satu. Setelah bentuknya didapatkan, kita bisa mendapatkan solusi dari persamaan asalnya dengan transformasi inversnya. Kita akan mengilustrasikan metode ini dalam dua contoh berikut.

**Contoh 5.8.1.** Selsaikan persamaan diferensial berikut

$$y''(t) - a^2yt = f(t)$$

dengan  $a$  sebuah konstanta dan  $f(t)$  fungsi yang diberikan. Kondisi yang harus dipenuhi adalah fungsi tersebut hilang ketika  $t \rightarrow \pm\infty$ . Hal ini menjamin transformasi Fouriernya

ada.

**Solusi 5.8.1.** Lakukan transformasi Fourier pada persamaan dan misalkan

$$\widehat{y}(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}, \quad \widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}.$$

Karena

$$\mathcal{F}\{y''\} = (i\omega)^2 \mathcal{F}\{y(t)\} = -\omega^2 \widehat{y}(\omega),$$

persamaan diferensialnya menjadi

$$-(\omega^2 + a^2)\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega).$$

Maka

$$\widehat{y}(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + a^2)} \widehat{f}(\omega)$$

Ingat kembali

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{(\omega^2 + a^2)},$$

sehingga

$$-\frac{1}{(\omega^2 + a^2)} = \mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{1}{2a}e^{-a|t|}\right\}.$$

Dengan kata lain jika kita mendefinisikan

$$\widehat{g}(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + a^2)}, \quad \text{maka} \quad g(t) = -\frac{1}{2a}e^{-a|t|}.$$

Menurut teorema konvolusi

$$\widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{g(t) * f(t)\}.$$

Karena

$$\widehat{y}(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + a^2)} \widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{g(t) * f(t)\},$$

kita mendapatkan

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{y}(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(t) * f(t)\} = g(t) * f(t).$$

Sehingga

$$y(t) = -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t-\tau|} f(\tau) \, d\tau,$$

yang merupakan solusi khusus dari persamaan. Dengan  $f(t)$  tertentu persamaan ini bisa dihitung.

**Contoh 5.8.2.** Gunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan persamaan gelombang klasik satu dimensi

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (5.17)$$

dengan kondisi awal

$$y(x, 0) = f(x) \quad (5.18)$$

dengan  $v^2$  konstan.

**Solusi 5.8.2.** Marilah kita lakukan analisis Fourier  $y(x, t)$  terhadap  $x$ . Pertama nyatakan  $y(x, t)$  dalam integral Fourier

$$y(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(k, t) e^{ikx} dk, \quad (5.19)$$

sehingga transformasi Fourier-nya

$$\hat{y}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (5.20)$$

Dari (5.18) dan (5.19) yaitu

$$y(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(k, 0) e^{ikx} dk = f(x). \quad (5.21)$$

Karena integral Fourier  $f(x)$  adalah

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad (5.22)$$

jelas

$$\hat{y}(k, 0) = \hat{f}(k). \quad (5.23)$$

Dengan melakukan transformasi Fourier persamaan asalnya

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} e^{-ikx} dx.$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Suku pertama hanyalah transformasi Fourier turunan kedua  $y(x, t)$  terhadap  $x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = (ik)^2 \hat{y}(k, t),$$

sehingga persamaannya menjadi

$$-k^2 \hat{y}(k, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{y}(k, t).$$

Jelas solusi umum persamaannya adalah

$$\hat{y}(k, t) = c_1(k) e^{ikvt} + c_2(k) e^{-ikvt},$$

dengan  $c_1(k)$  dan  $c_2(k)$  konstanta yang bergantung waktu. Pada  $t = 0$ , menurut (5.23)

$$\hat{y}(k, 0) = c_1(k) + c_2(k) = \hat{f}(k).$$

Persamaan ini dapat dipenuhi dengan bentuk simetrik dan anti simetrik

$$\begin{aligned}c_1(k) &= \frac{1}{2} [\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)], \\c_2(k) &= \frac{1}{2} [\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)],\end{aligned}$$

dengan  $\widehat{g}(k)$  fungsi yang belum didefinisikan. Sehingga

$$\widehat{y}(k, t) = \frac{1}{2} \widehat{f}(k) (e^{ikvt} + e^{-ikvt}) + \frac{1}{2} \widehat{g}(k) (e^{ikvt} - e^{-ikvt}).$$

Substitusi pada (5.19), kita memiliki

$$\begin{aligned}y(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \widehat{f}(k) [e^{ik(x+vt)} + e^{ik(x-vt)}] dk \\&+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \widehat{g}(k) [e^{ik(x+vt)} - e^{ik(x-vt)}] dk.\end{aligned}$$

Dengan membandingkan integralnya

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ik(x+vt)} dk$$

dengan (5.22), kita melihat integralnya sama hanya argumen  $x$  diganti dengan  $x + vt$ . Sehingga

$$I_1 = f(x + vt)$$

Diperoleh:

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + vt) + f(x - vt)] + \frac{1}{2} [g(x + vt) - g(x - vt)],$$

dengan  $g(x)$  adalah invers transformasi Fourier dari  $\widehat{g}(k)$ . Fungsi  $g(x)$  ditentukan oleh kondisi awal atau syarat batas tambahan.

## 5.9 Ketidakpastian Gelombang

Transformasi Fourier membuat kita bisa memecah gelombang yang rumit bahkan non periodik dan menjadikannya gelombang sederhana. Cara melakukannya adalah dengan mengasumsikan gelombangnya berupa fungsi periodik dengan periode tertentu yang berhingga. Karena tidak mungkin mengamati gelombang dalam waktu tak berhingga, kita harus melakukan analisis berdasarkan observasi pada waktu yang berhingga. Konsekuensinya, kita tidak bisa yakin 100% dengan karakteristik gelombang tersebut.

Sebagai contoh, sebuah fungsi konstan  $f(x)$  tidak memiliki osilasi, sehingga frekuensinya nol. Sehingga transformasi Fouriernya  $\widehat{f}$  adalah sebuah fungsi delta pada  $\omega = 0$ , seperti terlihat pada Gambar 5.2. Tetapi hal ini hanya berlaku untuk sebuah fungsi yang konstan dari  $-\infty$  ke  $\infty$ . Tetapi tentu kita tidak yakin akan hal ini. Apa yang kita katakan adalah fungsi tersebut konstan pada selang waktu tertentu  $\Delta t$ . Hal ini direpresentasikan dengan

pulsa persegi/kotak pada Gambar 5.4. Di luar selang waktu ini, kita tidak memiliki informasi, sehingga fungsinya kita berikan nilai nol. Transformasi Fourier fungsi ini adalah  $2 \sin a\omega/\omega$ . Seperti yang terlihat pada Gambar 5.4 terdapat penyebaran frekuensi di sekitar  $\omega = 0$ . Dengan kata lain terdapat ketidakpastian frekuensi gelombang. Kita dapat mengatakan ketidakpastian dengan mengukur lebar  $\Delta\omega$  dari puncak pusatnya. Dalam contoh ini  $\Delta t = 2a$ ,  $\Delta\omega = 2\pi/a$ . Menarik untuk memperhatikan bahwa  $\Delta t\Delta\omega = 4\pi$  yang merupakan sebuah konstanta. Karena sebuah konstanta, maka nilainya tidak bisa nol, tidak peduli seberapa besar atau kecilnya  $\Delta t$ . Sehingga akan selalu terdapat derajat ketidakpastian.

Menurut mekanika kuantum, foton atau elektron, dapat kita anggap sebagai gelombang. Sebagai gelombang, maka akan terdapat ketidakpastian yang berlaku untuk semua gelombang. Sehingga dalam dunia subatomik, fenomena hanya dapat dideskripsikan dengan jangkauan presisi yang mengijinkan adanya ketidakpastian gelombang. Hal ini dikenal sebagai prinsip ketidakpastian yang pertama kali dikemukakan oleh Werner Heisenberg.

Dalam mekanika kuantum, jika  $f(t)$  fungsi gelombang ternormalisasi, yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1,$$

maka nilai ekspektasi  $\langle t^n \rangle$  yang didefinisikan sebagai

$$\langle t^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 t^n dt.$$

Ketidakpastian  $\Delta t$  diberikan oleh “akar rata-rata kuadrat ” yaitu

$$\Delta t = \langle t^2 - \langle t \rangle^2 \rangle^{1/2}.$$

Jika  $\hat{f}(\omega)$  adalah transformasi Fourier dari  $f(t)$ , maka menurut teorema Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi.$$

Sehingga nilai ekspektasi dari  $\langle \omega^n \rangle$  diberikan oleh

$$\langle \omega^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \omega^n d\omega.$$

Dengan cara yang sama ketidakpastian  $\Delta\omega$  adalah

$$\Delta\omega = \langle \omega^2 - \langle \omega \rangle^2 \rangle^{1/2}.$$

Jika  $f(t)$  diberikan oleh fungsi Gaussian ternormalisasi

$$f(t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-at^2),$$

jelas bahwa  $\langle t \rangle = 0$ , karena integran dari  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 t dt$  adalah fungsi ganjil, dan  $\Delta t = \langle t^2 \rangle^{1/2}$ . Dengan definisi

$$\langle t^2 \rangle = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2at^2) t^2 dt.$$

Dengan mengintegrasikan parsial, kita bisa memperoleh

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2at^2)t^2 dt &= -\frac{1}{4a}t \exp(-2at^2)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2at^2) dt \\ &= \frac{1}{4a} \left(\frac{1}{2a}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du = \frac{1}{4a} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Maka

$$\Delta t = \langle t^2 \rangle^{1/2} = \left[ \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2a} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2} \right]^{1/2} = \left(\frac{1}{4a}\right)^{1/2}.$$

Sekarang

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right).$$

Sehingga  $\langle \omega \rangle = 0$  dan

$$\begin{aligned}\langle \omega^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\omega)|^2 \omega^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2a}\right) \omega^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{a}\right) a(2a\pi)^{1/2} = a\end{aligned}$$

Maka

$$\Delta \omega = \langle \omega^2 \rangle^{1/2} = (a)^{1/2}$$

Kemudian kita mempunyai

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = \left(\frac{1}{4a}\right)^{1/2} (a)^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Seperti yang sudah kita diskusikan bahwa apabila variabel  $t$  (merepresentasikan waktu) kita ganti dengan variabel  $x$  (merepresentasikan jarak), frekuensi sudut  $\omega$  kita ganti dengan bilangan gelombang  $k$ . Hubungan ini bisa kita tuliskan sebagai

$$\Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{2}.$$

Dua buah hubungan fundamental dalam mekanika kuantum adalah

$$E = \hbar\omega \quad \text{dan} \quad p = \hbar k,$$

dengan  $E$  adalah energi,  $p$  momentum dan  $\hbar$  adalah konstanta Planck yaitu  $h/2\pi$ . Sehingga ketidakpastian energi adalah  $\Delta E = \hbar\Delta\omega$  dan ketidakpastian momentum  $\Delta p = \hbar\Delta k$ . Dengan gelombang Gaussian kita memiliki

$$\Delta t \cdot \Delta E = \frac{\hbar}{2} \quad \Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

Karena tidak ada bentuk fungsi gelombang yang dapat mereduksi ketidakpastian di bawah nilai ini, hubungan ini biasanya dituliskan sebagai

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

yang merupakan pernyataan formal dari prinsip ketidakpastian dalam mekanika kuantum.

## Latihan

1. Gunakan sebuah fungsi ganjil untuk menunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi \omega}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}.$$

2. Gunakan sebuah fungsi genap untuk menunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-t}.$$

3. Tunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t + \omega \sin \omega t}{1 + \omega^2} \, d\omega = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{\pi}{2} & t = 0, \\ \pi e^{-t} & t > 0. \end{cases}$$

4. Tunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi \omega \sin \omega t}{1 - \omega^2} \, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi \sin t}{2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

5. Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a, \\ 0 & t > a. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega \cos \omega t}{\omega} \, d\omega.$$

6. Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < a, \\ 0 & t > a. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{a \sin a\omega}{\omega} + \frac{\cos a\omega - 1}{\omega^2} \right) \cos \omega t \, d\omega.$$

7. Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = e^{-t} + e^{-2t}, \quad t > 0.$$

$$\text{Jawab: } f(t) = \frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 + \omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} \cos \omega t \, d\omega.$$


---



8. Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < a, \\ 0 & t > a. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \left( a^2 - \frac{2}{\omega^2} \right) \sin a\omega + \frac{2a}{\omega} \cos a\omega \right] \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega.$$

9. Carilah transformasi Fourier cosinus dan sinus dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1, \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } \hat{f}_s = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos \omega}{\omega}, \quad \hat{f}_c = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

10. Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } \frac{1}{(1 + i\omega)}$$

11. Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & |t| < 1, \\ 0 & 1 < |t|. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } \left( \frac{2e^{i\omega}}{i\omega} + \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2} \right).$$

12. Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} e^t & |t| < 1, \\ 0 & 1 < |t|. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } \frac{e^{1-i\omega} - e^{-1+i\omega}}{1 - i\omega}.$$

13. Tunjukkan bahwa jika  $f(t)$  fungsi genap, maka transformasi Fourier menjadi transformasi Fourier cosinus, jika  $f(t)$  fungsi ganjil, maka transformasi Fourier menjadi transformasi Fourier sinus.

Perhatikan bahwa konstanta pengali  $\alpha$  dan  $\beta$  bisa berbeda dengan apa yang sudah kita definisikan. Tetapi ingat sepanjang hasil kali  $\alpha \times \beta = 2/\pi$ , maka ekuivalen.

14. Jika  $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , tunjukkan bahwa

$$\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\} = \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega).$$

Petunjuk: Buktikan terlebih dahulu  $\frac{d\hat{f}}{d\omega} = -i\mathcal{F}\{tf(t)\}$ .

15. Tunjukkan bahwa

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{t} f(t) \right\} = -i \int_{-\infty}^{\omega} \hat{f}(\omega') d\omega'$$

16. (a) Carilah konstanta normalisasi  $A$  dari fungsi Gaussian  $\exp(-at^2)$  sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A \exp(-at^2)|^2 dt = 1$$

(b) Carilah transformasi Fourier  $\hat{f}(\omega)$  dari sebuah fungsi Gaussian dan buktikan teorema Parseval dengan integrasi eksplisit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi.$$

Jawab:  $A = (2a/\pi)^{1/4}$

17. Gunakan transformasi Fourier dari  $\exp(-|t|)$  dan teorema Parseval untuk menunjukkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(1 + \omega^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

18. (a) Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & -2 < t < 2 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

(b) Gunakan hasil (a) dan teorema Parseval untuk menghitung integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^4 dt.$$

Jawab  $I = 2\pi/3$

19. Fungsi  $f(r)$  memiliki transformasi Fourier

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(r) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2}.$$

Tentukan  $f(r)$ .

Jawab.  $f(r) = \frac{1}{4\pi r}$

20. Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = te^{-4t^2}$$

Jawab  $\hat{f}(\omega) = -i \frac{\sqrt{\pi}}{16} \omega e^{-\omega^2/16}$

21. Carilah invers transformasi Fourier dari

$$\hat{f}(\omega) = e^{-2|\omega|}$$

Jawab  $f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2 + 4}$

22. Hitunglah

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{\omega^2 + 4\omega + 13} \right\}$$

Petunjuk:  $\omega^2 + 4\omega + 13 = (\omega + 2)^2 + 9$

Jawab:  $f(t) = \frac{1}{6}e^{-i2t}e^{-3|t|}$ .